THE FEATURED
PROGRAM EDUCATION

البرنامج المميز

الثاني عشر متقدم

MATH ARB

CHAPTER 6

Mr. Ahmed Ata
The Featured Program

2025-2026

البرنامج المميز طريقك للتميز

Prepared by :

MR- AHMED ATA

@AHMEDATACHAT

https://t.me/ahmedatachat

0566010255 -0502070147

ahmatta.math@gmail.com

UAE - ABU DHABI

6 – تطبيقات على التكامل المحدود

1. المساحة بين منحنيين
2. الحجم : شرائح وأقراص وحلقات
3. الاحجام بالأصداف الاسطوانية
4. طول القوس ومساحةالسطح
5. حركة المقذوفات
6. تطبيقات التكامل على الفيزياء والهندسة
7. الاحتمال

AHMED ATA AHMED ATA AHMED ATA AHMED ATA AHMED ATA AHMED ATA AHMED ATA AHMED ATA AHMED ATA

THE FEATURED
PROGRAM EDUCATION

البرنامج المميز

MATH ARB

الثاني عشر متقدم

الدرس (1-6)

المساحة المحصورة بين منحنيين

Mr. Ahmed Ata
The Featured Program
2025-2026

البرنامج المميز طريقك للتميز

Prepared by :

MR- AHMED ATA

@AHMEDATACHAT

https://t.me/ahmedatachat
0566010255 -0502070147
ahmatta.math@gmail.com
UAE - ABU DHABI

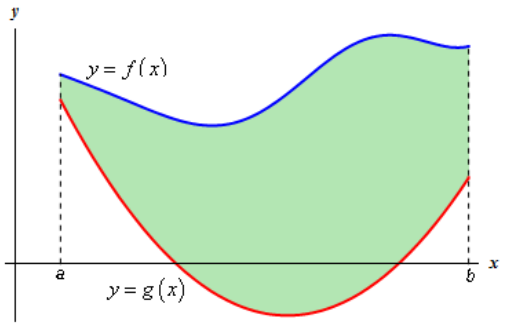
الدرس (1-6)

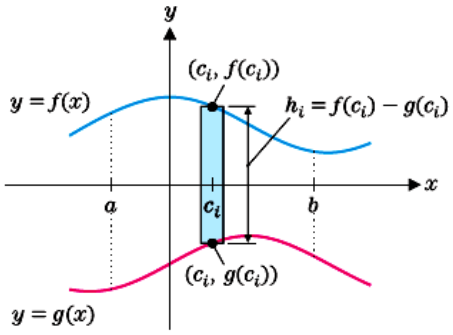
المساحة المحصورة بين منحنيين

في هذا القسم ، سننظر في إيجاد المساحة بين منحنيين. هناك بالفعل حالتان سننظر فيهما.

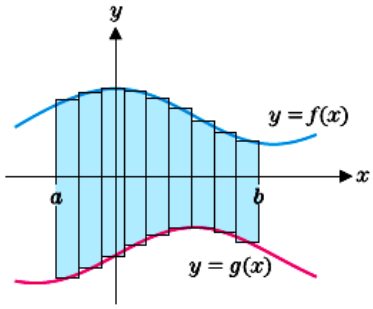
في الحالة الأولى ، نريد تحديد المنطقة الواقعة بين y = f (x) و y = g (x) في الفترة [a,b] سنفترض أيضًا أن f (x) ≥ g(x) انظر إلى الرسم التخطيطي التالي للحصول على فكرة عما سننظر إليه في البداية.

$$A = \int_a^b f(x) - g(x)\, dx$$

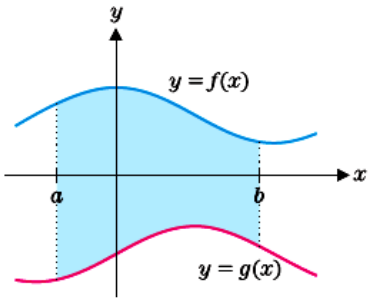




مساحة المستطيل عند الحد i



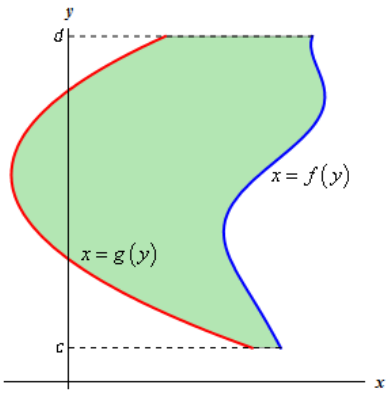
القيمة التقريبية للمساحة

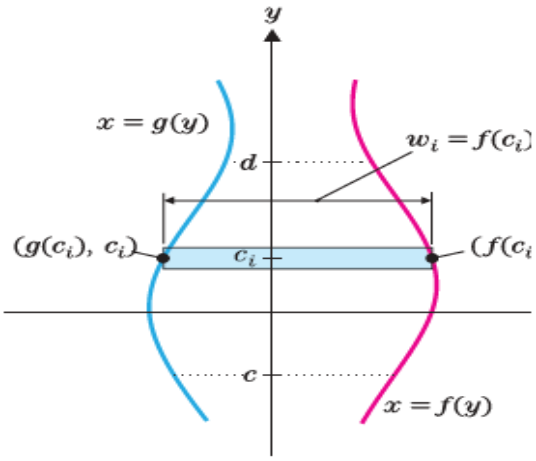


المساحة بين منحنيين

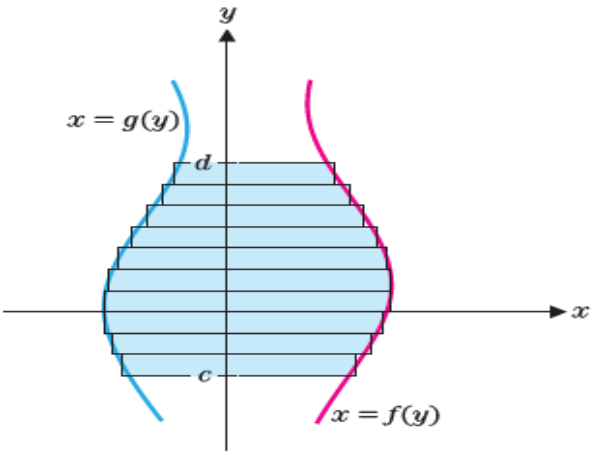
الحالة الثانية متطابقة تقريبًا مع الحالة الأولى. سنقوم هنا بتحديد المساحة بين x = f (y) و x = g (y) على الفترة [c,d] مع f (y) ≥ g (y)

$$A = \int_c^d f(y) - g(y)\, dy$$





مساحة المستطيل عند الحد i

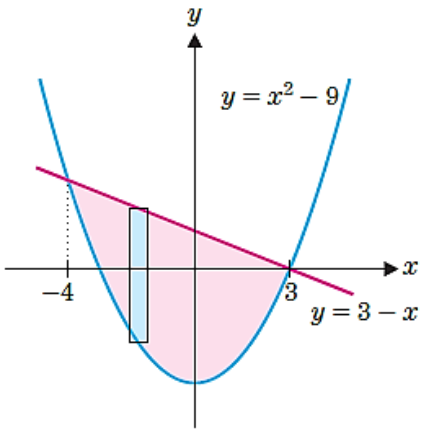


المساحة بين $x = g(y)$ و $x = f(y)$

مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيين

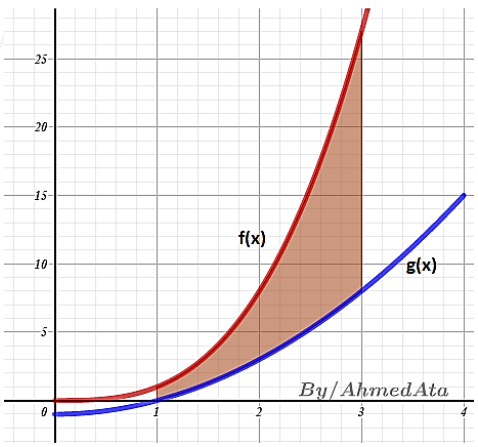
$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [f(c_i) - g(c_i)]\,\Delta x = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx \qquad (1.1)$$

1 جـــــد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الدالتين $y = 3 - x$ و $y = x^2 - 9$.



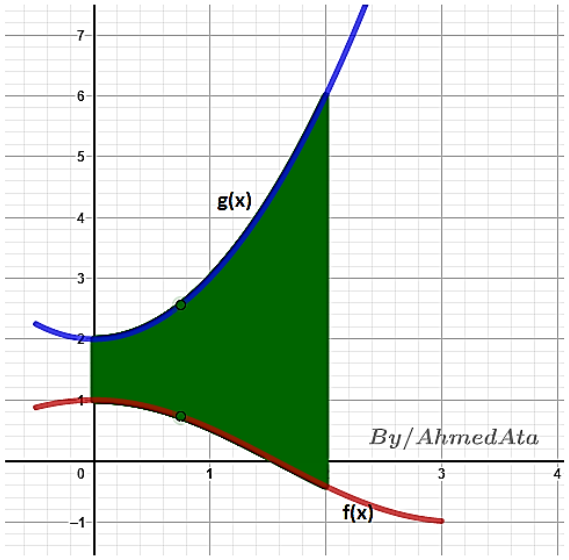
2 أوجد المساحة المحصورة بين المنحنيين على الفترة المعطاه

$$f(x) = x^3, g(x) = x^2 - 1 \;, 1 \le x \le 3$$



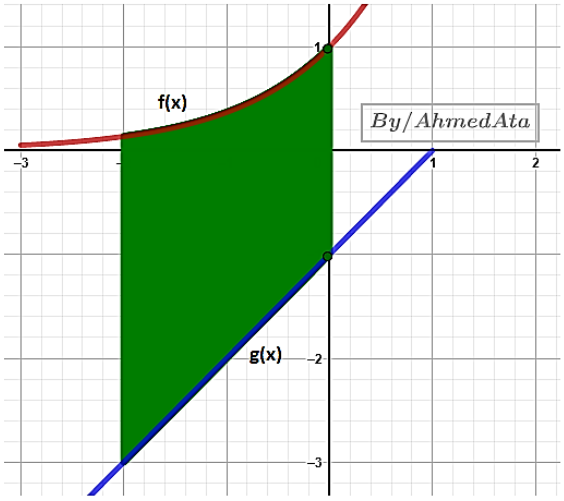
3 أوجد المساحة المحصورة بين المنحنيين على الفترة المعطاه

$f(x) = cosx \ , g(x) = x^2 + 2 \ , 0 \le x \le 2$



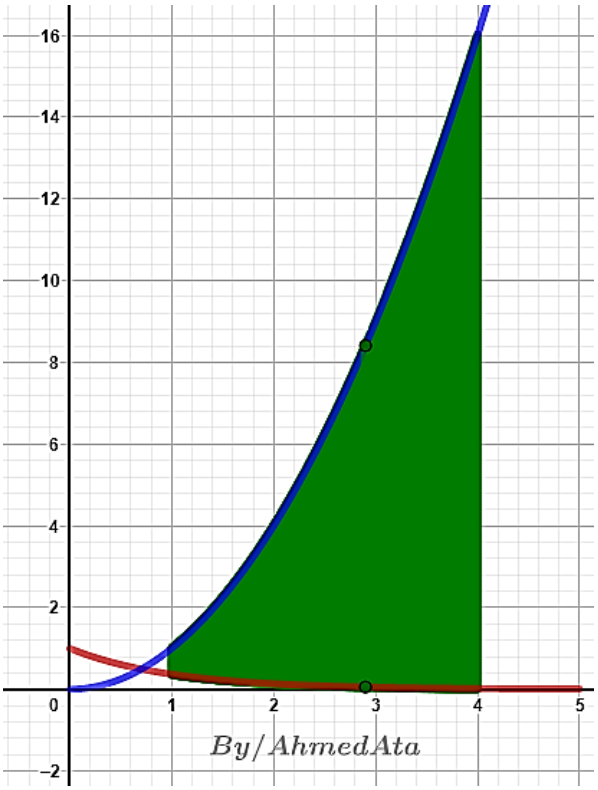
4 أوجد المساحة المحصورة بين المنحنيين على الفترة المعطاه

$f(x) = e^x \ , g(x) = x - 1 \ , -2 \le x \le 0$



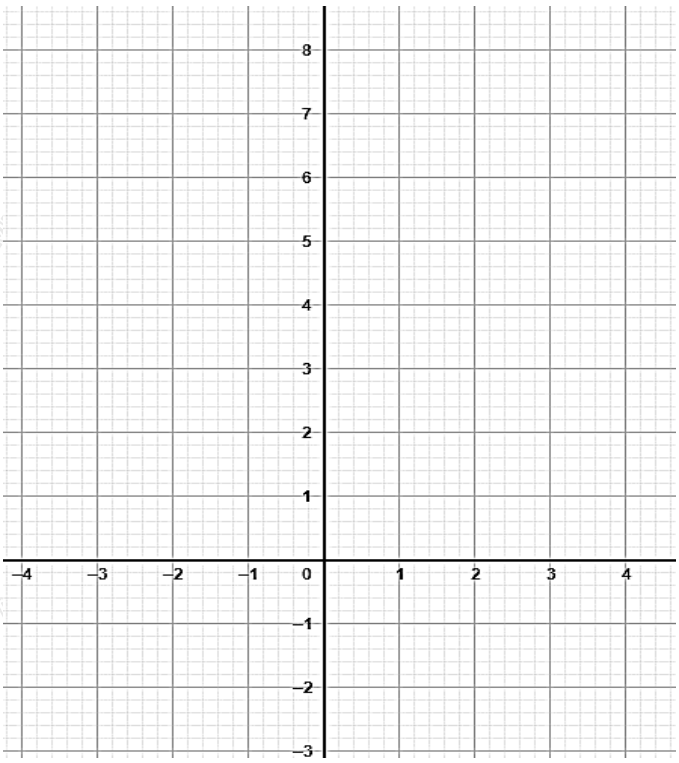
5 أوجد المساحة المحصورة بين المنحنيين على الفترة المعطاه.

$$f(x) = e^{-x}, g(x) = x^2, 1 \le x \le 4$$

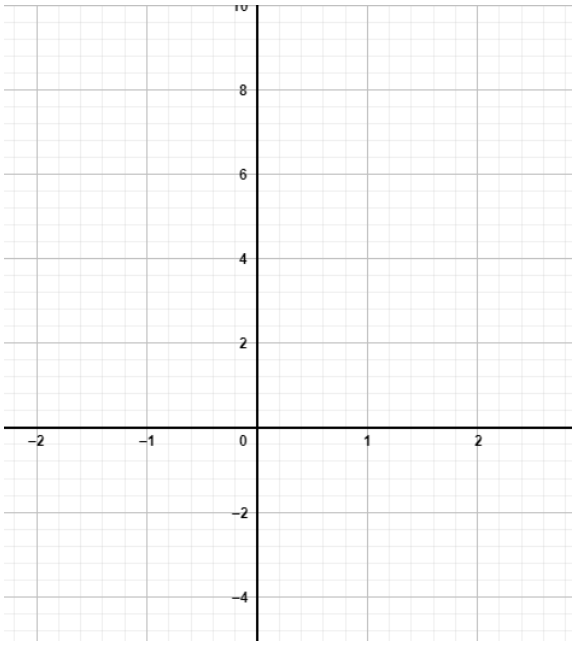


6 ارسم وأوجد مساحة المنطقة التي تحددها تقاطعات المنحنيات

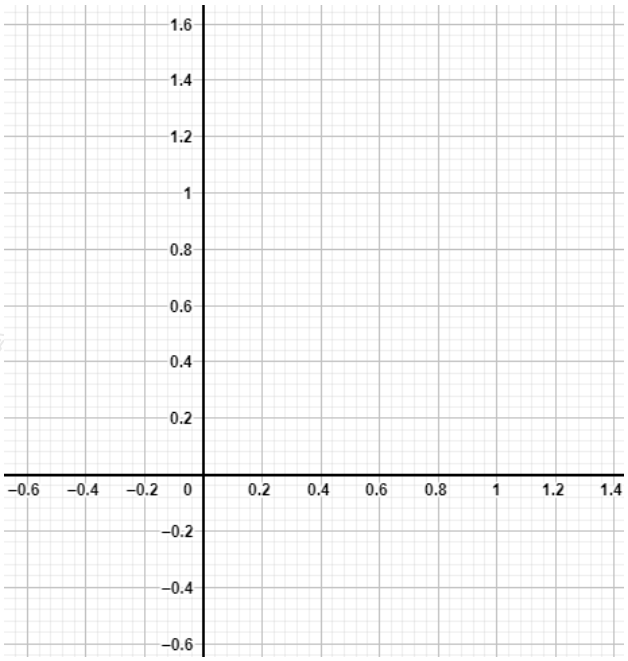
$$y = x^2 - 1, y = 7 - x^2$$



7 $y = x^3, y = 3x + 2$

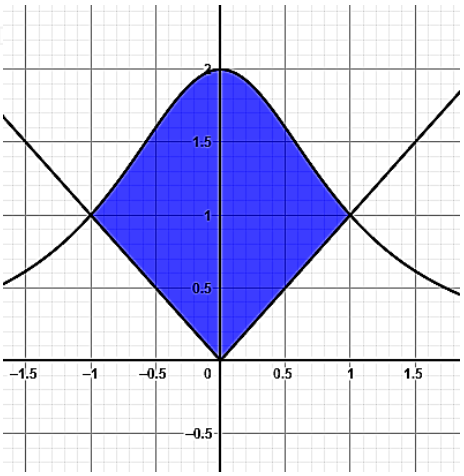


8 $y = \sqrt{x}, y = x^2$

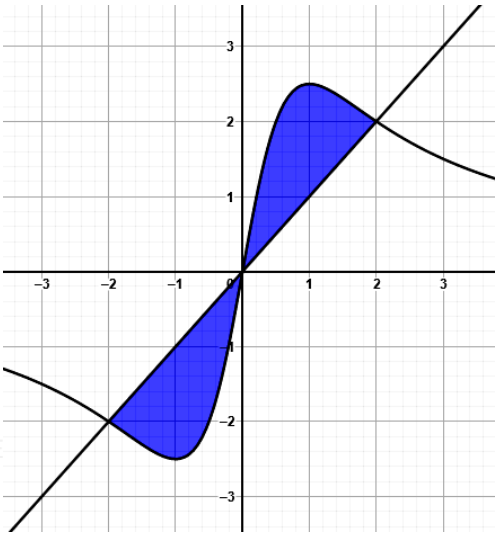


AHMED ATA

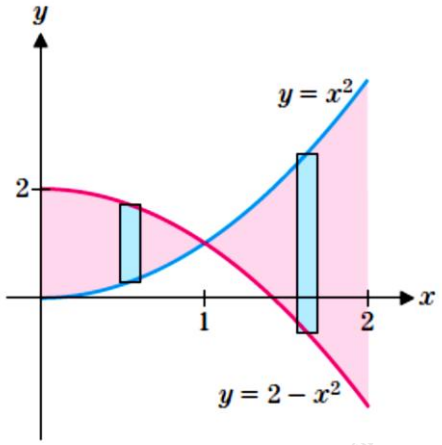
9 $y = \dfrac{2}{x^2+1}, y = |x|$



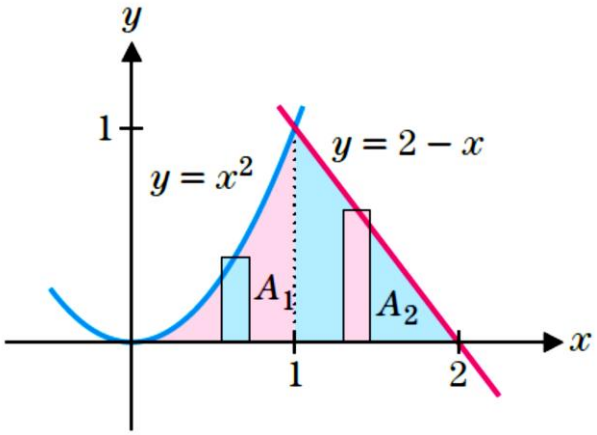
10 $y = \dfrac{5x}{x^2+1}, y = x$



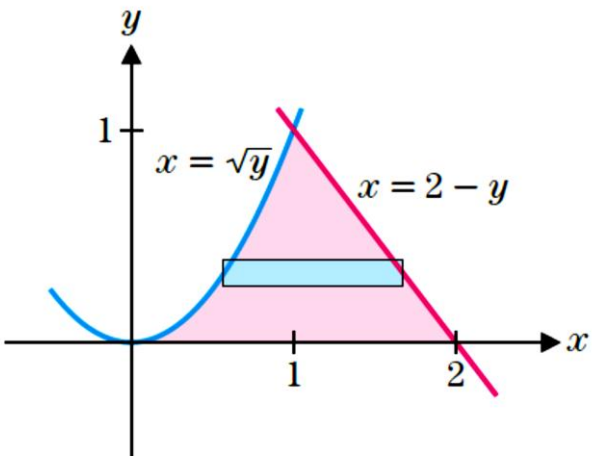
11 جـــد مساحة المنطقة المحصورة بين التمثيلين البيانيين $y = x^2$ و $y = 2 - x^2$ لأجل $0 \le x \le 2$.



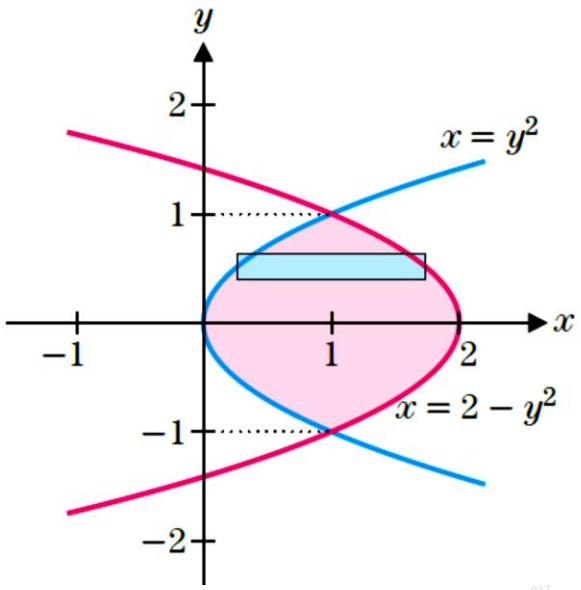
12 جـــد مساحة المنطقة المحصورة بين التمثيلين البيانيين $y = x^2$ ، $y = 2 - x$ و $y = 0$.



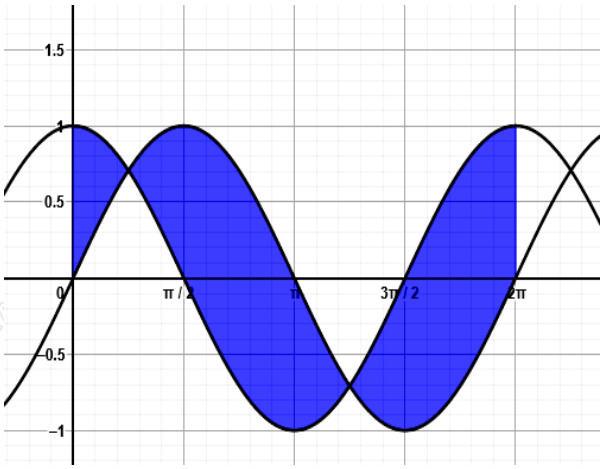
13 جـــد مساحة المنطقة المحصورة بين التمثيلين البيانيين $y = x^2$ ، $y = 2 - x$ و $y = 0$.



14 جـــد مساحة المنطقة المحصورة بين التمثيلين البيانيين $x = y^2$ و $x = 2 - y^2$.

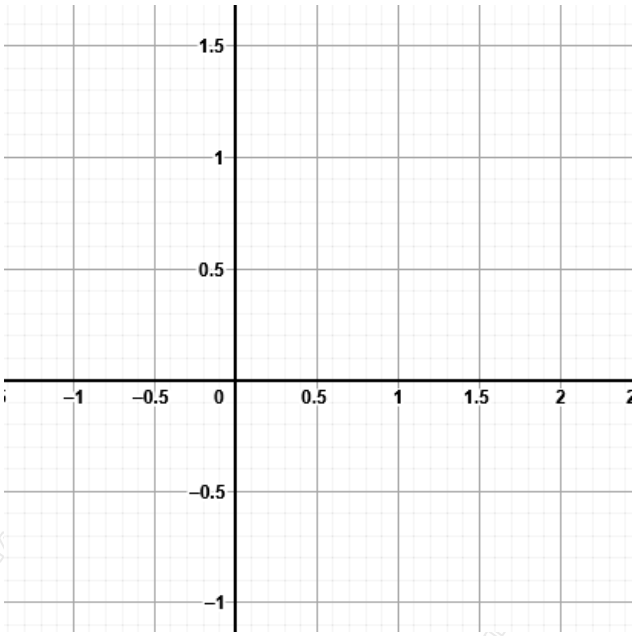


15 $y = \sin x\,(0 \le x \le 2\pi),\ y = \cos x$

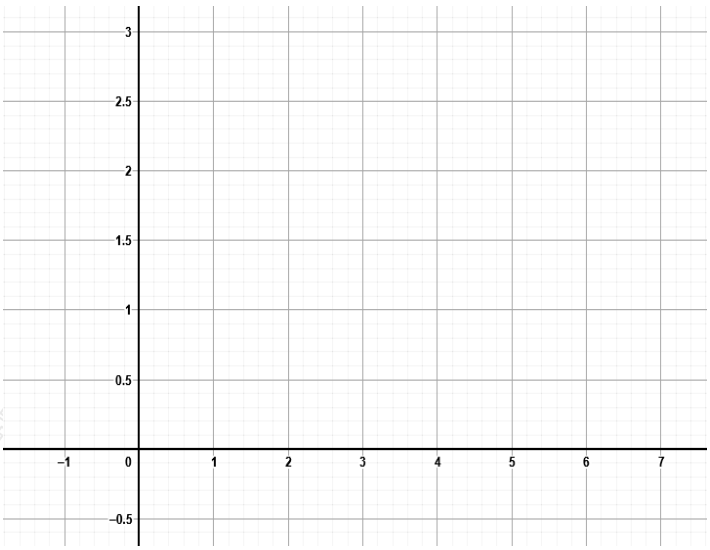


ارسم واوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيات المعطاة . اختر متغير التكامل بحيث تتم كتابة المساحة كتكامل واحد

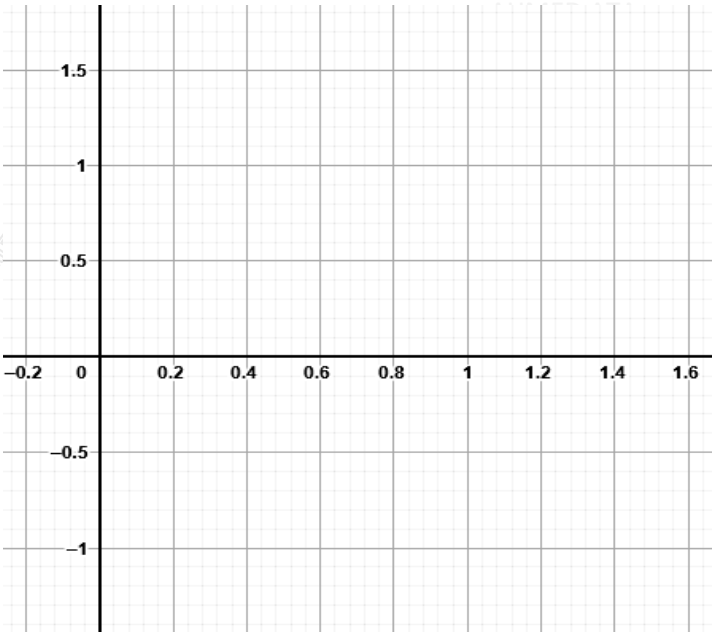
16 $y = x, y = 2 - x, y = 0$



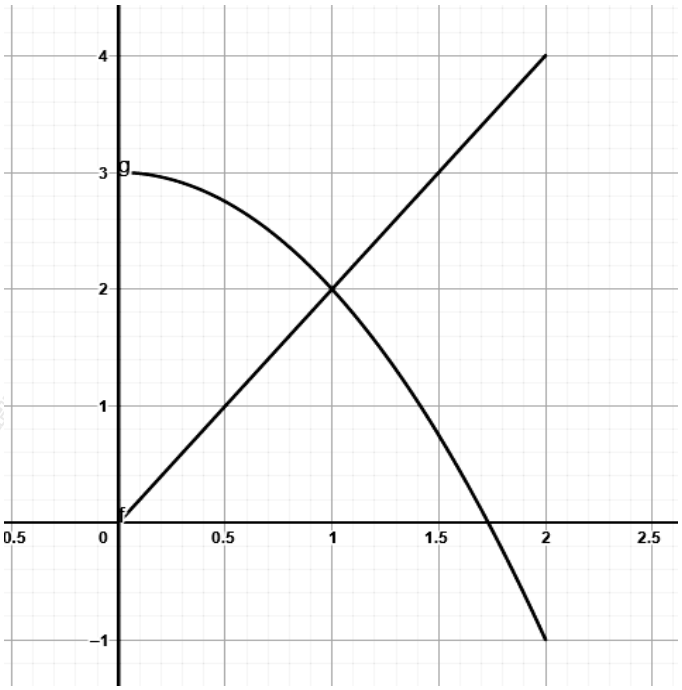
17 $y = x, y = 2, y = 6 - x, y = 0$



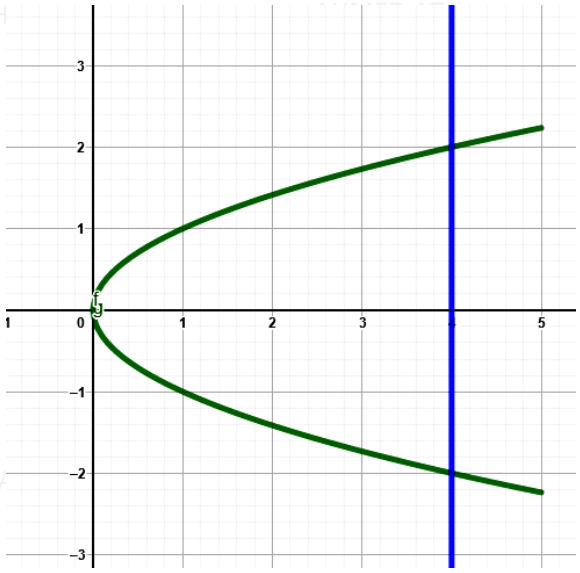
18 $x = y, x = -y, x = 1$



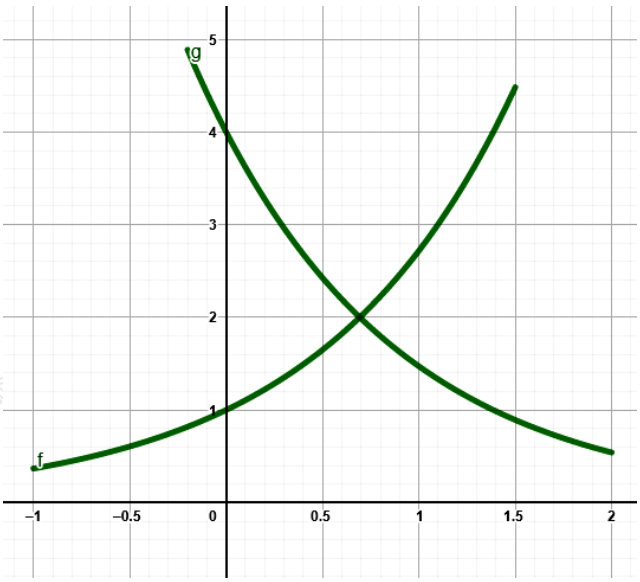
19 $y = 2x\ (x > 0), y = 3 - x^2, x = 0$



20 $x = y^2, x = 4$



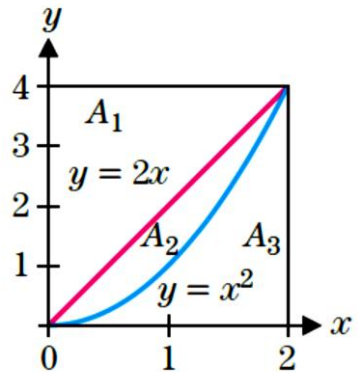
21 $y = e^x, y = 4e^{-x}, x = 0$



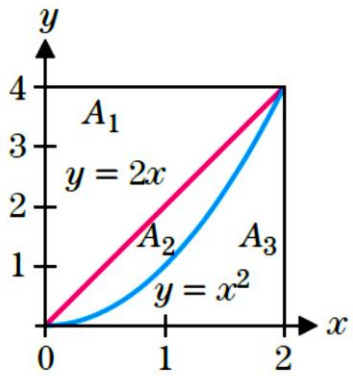
AHMED ATA
The Featured program

22 بدلالة A_1، A_2 و A_3، حدّد المساحة المُعطاة بكل تكامل.

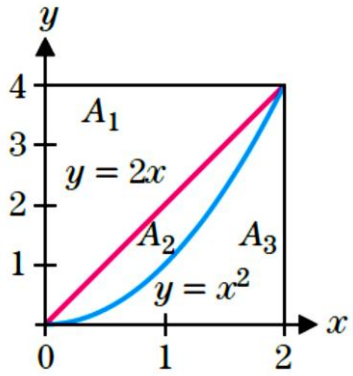
(a) $\int_0^2 (2x - x^2)\,dx$



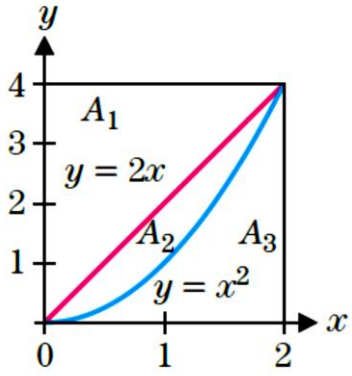
(b) $\int_0^2 (4 - x^2)\,dx$



(c) $\int_0^4 (2 - \sqrt{y})\,dy$



(d) $\int_0^4 (\sqrt{y} - \frac{y}{2})\,dy$



THE FEATURED
PROGRAM EDUCATION

البرنامج المميز

MATH ARB

الثاني عشر متقدم

الدرس (2-6)

الحجم – شرائح وأقراص وحلقات

Mr. Ahmed Ata
The Featured Program
2025-2026

البرنامج المميز طريقك للتميز

Prepared by :

MR- AHMED ATA

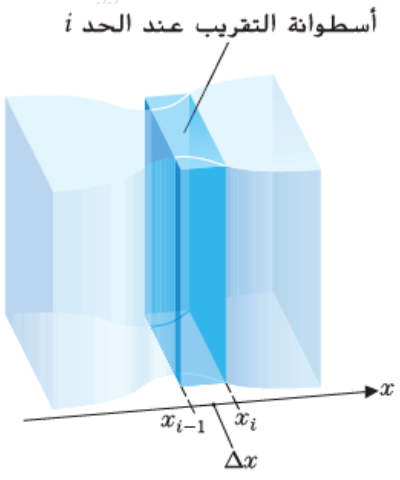
@AHMEDATACHAT

https://t.me/ahmedatachat
0566010255 -0502070147
ahmatta.math@gmail.com
UAE - ABU DHABI

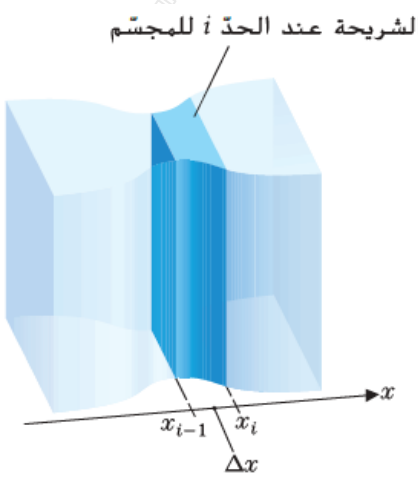
الدرس (6-2)

الحجم – شرائح وأقراص وحلقات

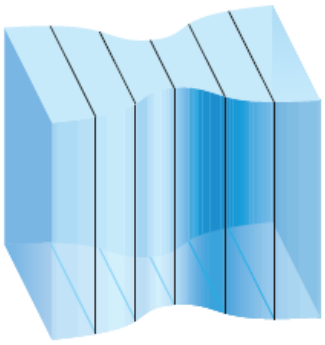
الاحجام بالتقطيع



اسطوانة التقريب عند الحد i



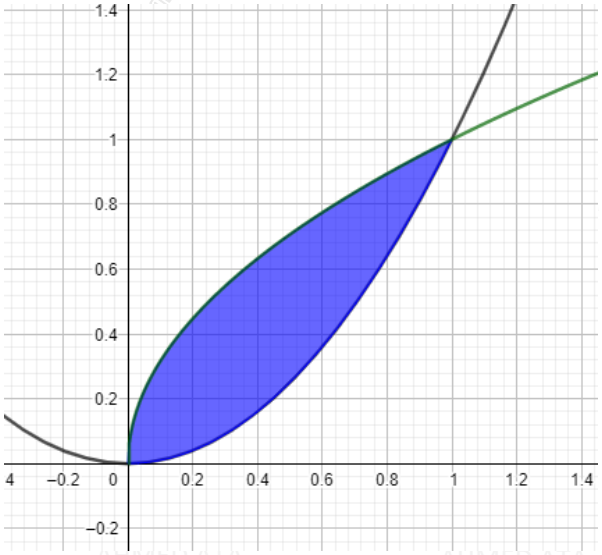
الشريحة عند الحد i للمجسّم


قطعة مجسّم

$$V = \int_a^b A(x)\,dx$$

1 أوجد حجم المجسم الذي قاعدتة محصورة بين المنحنيين $y = x^2$ و $y = \sqrt{x}$ في الحالات المشار إليها

a) المقاطع العرضية على شكل مربع

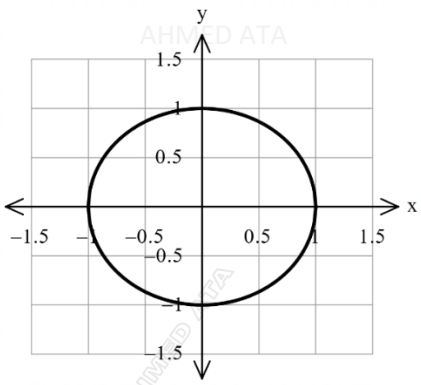


b) المقاطع العرضية على شكل مثلث متساوي الاضلاع

c) المقاطع العرضية على شكل نصف دائرة

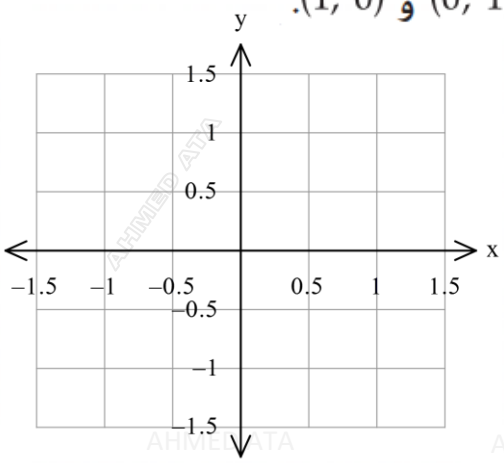
2 إنّ قاعدة المجسّم V هى الدائرة $x^2 + y^2 = 1$. جـــــد الحجم إذا كان لدى V مقاطع

a مقاطع عرضية مربعة متعامدة على محور x



b مقاطع عرضية على شكل نصف دائرة متعامدة على محور x

3 قاعدة المجسّم V هي مثلث رؤوسه $(-1, 0)$ و $(0, 1)$ و $(1, 0)$.



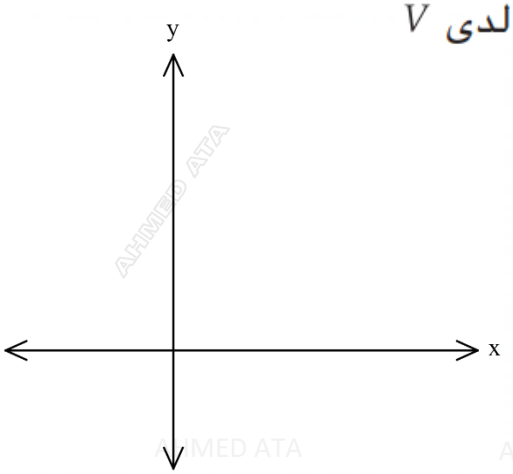
جـــــد الحجم إذا كان لدى V

a مقاطع عرضية مربعة متعامدة على محور x

b مقاطع عرضية على شكل نصف دائرة متعامدة على محور x

c مقاطع عرضية على شكل مثلثات متساوية الاضلاع متعامدة على محور x

4 قاعدة المجسّم V هي المنطقة المحدودة بواسطة $y = \ln x, x = 2$ و $y = 0$. جـــد الحجم إذا كان لدى V

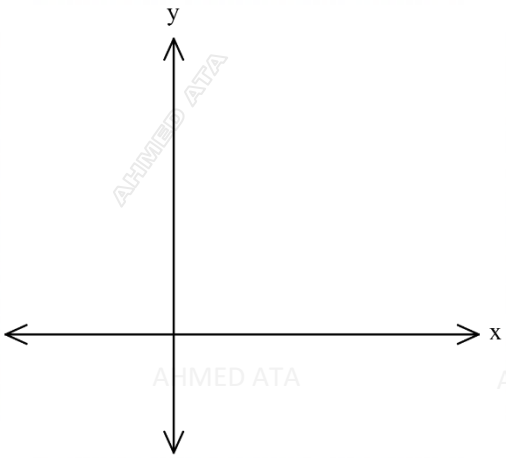


a مقاطع عرضية مربعة متعامدة على محور x

b مقاطع عرضية على شكل نصف دائرة متعامدة على محور x

c مقاطع عرضية على شكل مثلثات متساوية الاضلاع متعامدة على محور x

5 قاعدة المجسّم V هي المنطقة المحدودة بواسطة $y = e^{-2x}, y = 0, x = 0$ و $x = \ln 5$. جـــــد الحجم إذا كان لدى V



a مقاطع عرضية مربعة متعامدة على محور x

b مقاطع عرضية على شكل نصف دائرة متعامدة على محور x

AHMED ATA
The Featured program

اوجد حجم المجسم الذي مساحة مقطعة العرضي A(x)

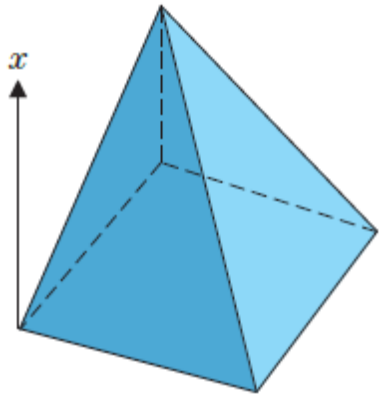
6 $A(x) = x + 2, -1 \le x \le 3$

7 $A(x) = 10e^{0.01x}, 0 \le x \le 10$

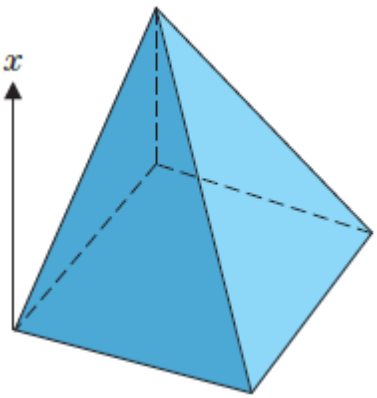
8 $A(x) = \pi(4 - x)^2, 0 \le x \le 2$

9 $A(x) = 2(x + 1)^2, 1 \le x \le 4$

10 للهرم في ممفيس قاعدة مربعة يبلغ طول ضلعها 180 وارتفاعها 100 تقريبًا. جد حجم الهرم باستخدام هذه القياسات..



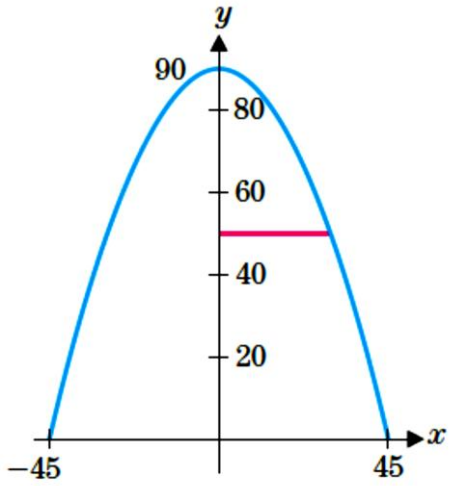
11 **يبلغ ارتفاع الهرم الأكبر في الجيزة 500 قدم، ويرتفع من قاعدة مربعة طول ضلعها 750 قدم. احسب حجمه باستخدام التكامل.**



12 على فرض أنّه بدلً من إكمال الهرم، توقف عمال البناء في الجيزة عند ارتفاع **250ft** بهضبة علوية مربعة طول ضلعها **375 ft** احسب حجم هذا البناء.

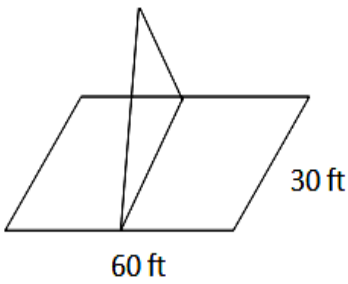
13 أوجد حجم هرم ارتفاعه **160 ft** بقاعدة مربعة طول ضلعها **300 ft**

14 على فرض أنّ للقبّة مقاطع عرضية دائرية، لها رسم تخطيطي يُعطى بالعلاقة $y = -\frac{2}{45}x^2 + 90$، لكل $-45 \le x \le 45$. (بالسنتيمترات، يعطي هذا الأمر أبعادًا مشابهة لقبة المبنى في الشكل جـــد حجم القبة.



15 يبلغ طول قبة كنيسة 30 ft بمقاطع عرضية مربعة. طول ضلع المربع الموجود في القاعد 3 ft. و طول ضلع المربع في الجزء العلوي 6 in و يتغيّر الضلع خطيًا بينهما. احسب الحجم.

16 تحتوي علية منزل على مقاطع عرضية مستطيلة موازية للأرض و مقاطع عرضية مثلثة متعامدة على الأرض.
إبعاد المستطيل 30 ft في 60 ft عند الجزء السفلي للعلية وتبلغ قاعدة المثلثات 30 ft و ارتفاع 10 ft. احسب حجم العلية.



17 يتم إعطاء الرسم التخطيطي لقبة $y = 60 - \frac{x^2}{60}$ لكل $-60 \le x \le 60$ (بالأمتار) بمقاطع عرضية دائرية متعامدة على المحور y. جـــــد حجمه.

18 لإناء فخاري مقاطع عرضية دائرية بنصف قطر $4 + \sin\frac{x}{2}$ سنتيمتر لكل $0 \le x \le 2\pi$. احسب حجمه.

19 لإناء فخاري مقاطع عرضية دائرية بنصف قطر $4 - \sin\frac{x}{2}$ سنتيمتر لكل $0 \le x \le 2\pi$. احسب حجمه.

SIMPSON'S RULE

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx S_n(f) = \frac{b-a}{3n}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \cdots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)].$$

20 على فرض أنّ فحص تصويرMRI المقطع العرضي لشرائح متجاورة لورم كما هو مذكور في الجدول.
استخدم قاعدة سمبسون لتقدير الحجم

x (cm)	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$A(x)$ (cm^2)	0.0	0.1	0.2	0.4	0.6	0.4	0.3	0.2	0.2	0.1	0.0

21 على فرض أنّ فحص تصويرMRI المقطع العرضي لشرائح متجاورة لورم كما هو مذكور في الجدول.
استخدم قاعدة سمبسون لتقدير الحجم

x (cm)	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2
$A(x)$ (cm^2)	0.0	0.2	0.3	0.2	0.4	0.2	0.0

22 على فرض أنّ فحص تصويرMRI المقطع العرضي لشرائح متجاورة لورم كما هو مذكور في الجدول.
استخدم قاعدة سمبسون لتقدير الحجم

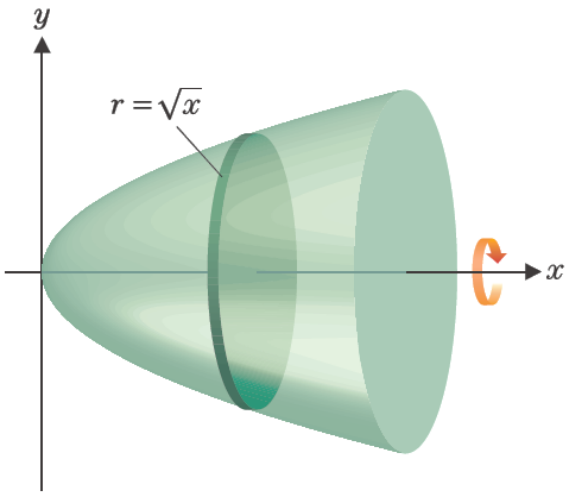
x (m)	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$A(x)$ (m^2)	2.0	1.8	1.7	1.6	1.8	2.0	2.1	2.2	2.4

طريقة الأقراص

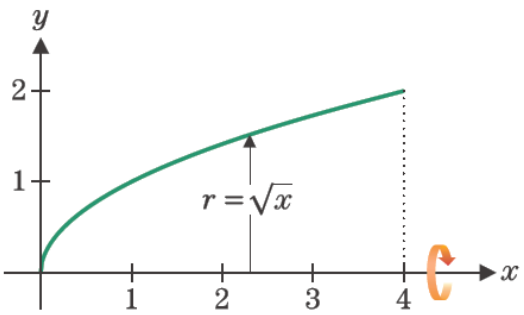
$$V = \int_a^b \underbrace{\pi[f(x)]^2}_{\text{مساحة مقطع عرضي} = \pi r^2}\, dx.$$

23

قم بدوران المنطقة تحت المنحنى $y = \sqrt{x}$ على الفترة $[0, 4]$ حول المحور x وجـــد حجم المجسّم الناتج عن الدوران.



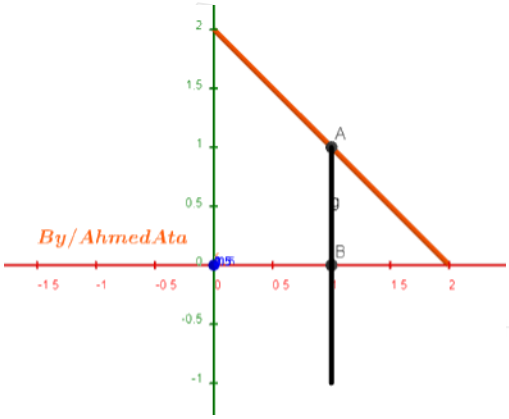
المجسّم الناتج عن الدوران

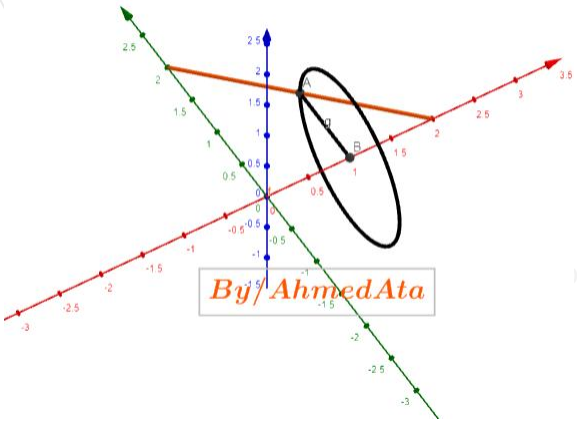


$y = \sqrt{x}$

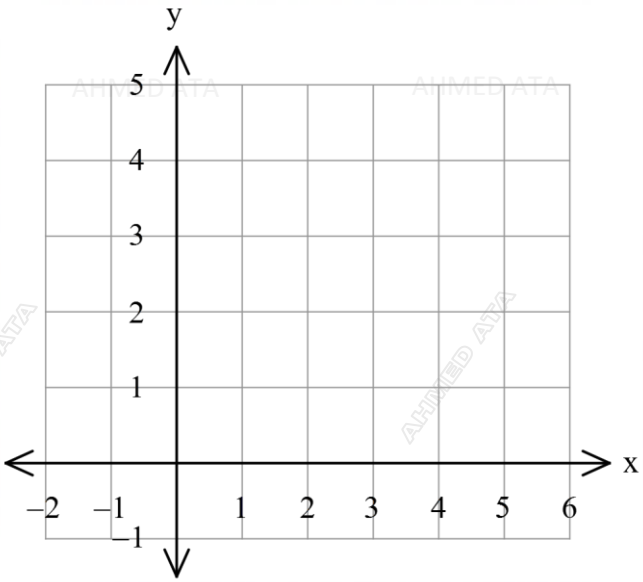
24 المنطقة المحدودة بواسطة $y = 2 - x, y = 0$ و $x = 0$ حول

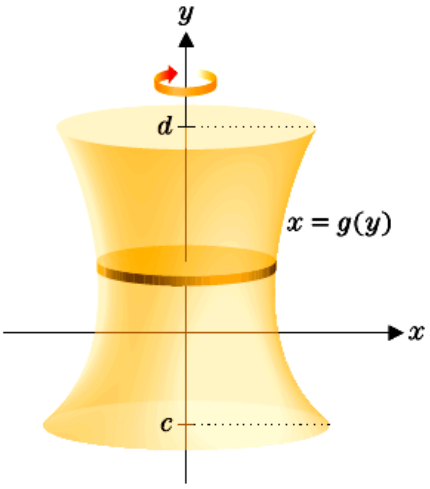
a) المحور x





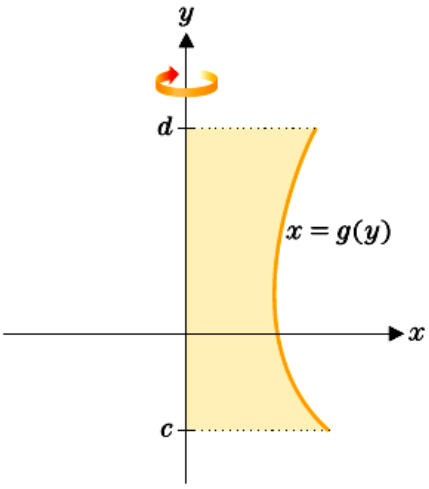
(b) $y = 3$





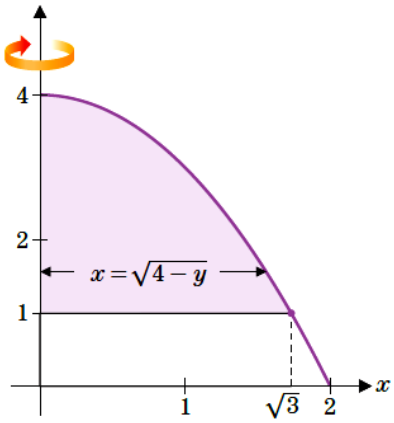
المجسّم الناتج عن الدوران

$$V = \int_c^d \underbrace{\pi[g(y)]^2}_{\text{مساحة مقطع عرضي} = \pi r^2}\, dy.$$

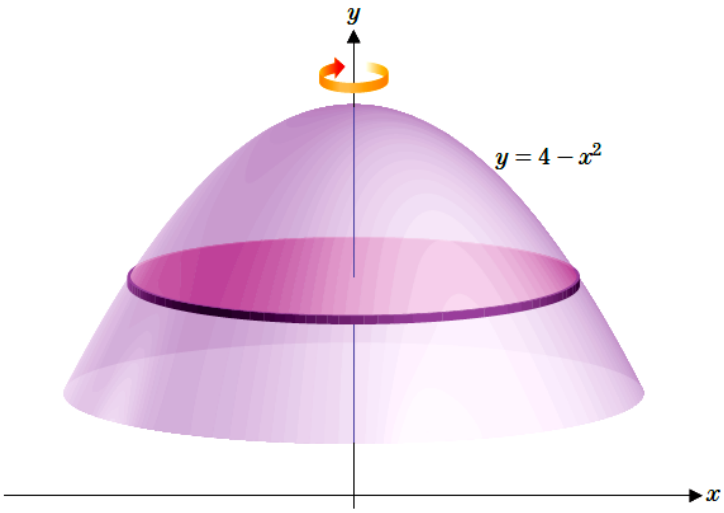


الدوران حول المحور y

25 جـــد حجم المجسّم الناتج عن دوران المنطقة المحدودة بين المنحنيين $y = 4 - x^2$ و $y = 1$ من $x = 0$ إلى $x = \sqrt{3}$ حول المحور y.



$y = 4 - x^2$

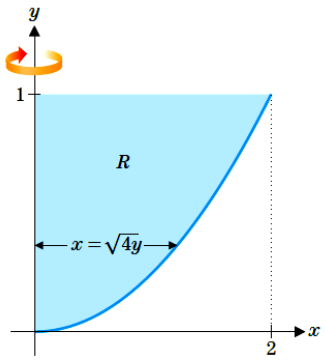


Solid of revolution

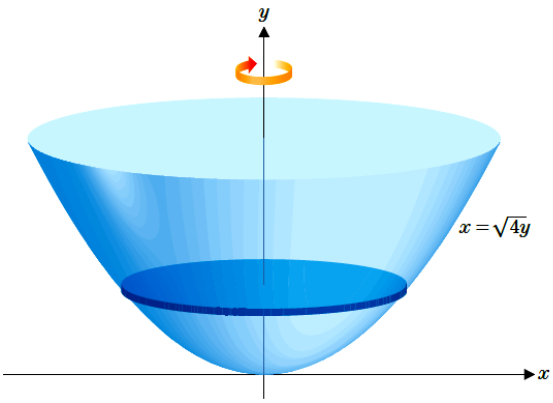
طريقة الحلقات

26 لتكن R هي المنطقة المحدودة بالتمثيلين البيانيين $y=\frac{1}{4}x^2, x=0$ و $y=1$. احسب حجم المجسّم الذي تكوّن من دوران R حول (a) المحور y و(b) المحور x و(c) المستقيم $y=2$.

(a) المحور y

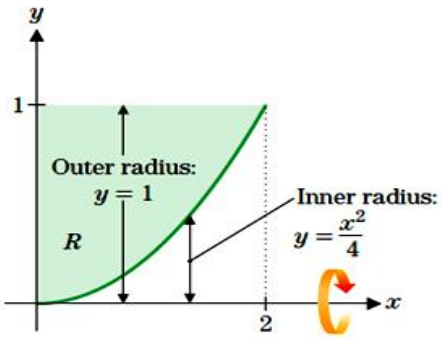


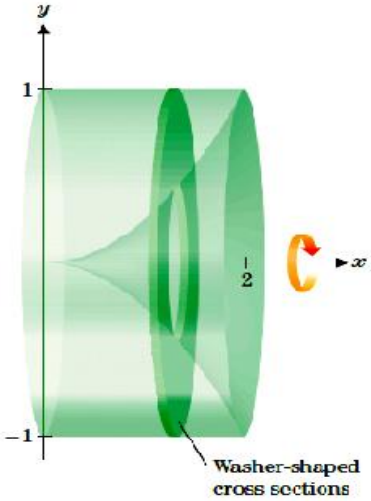
$x=\sqrt{4y}$



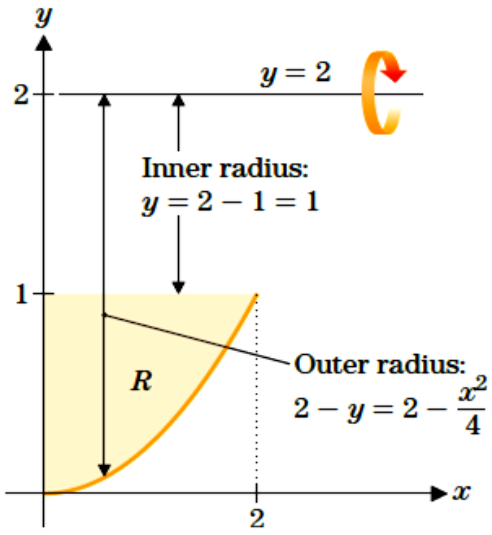
Solid of revolution

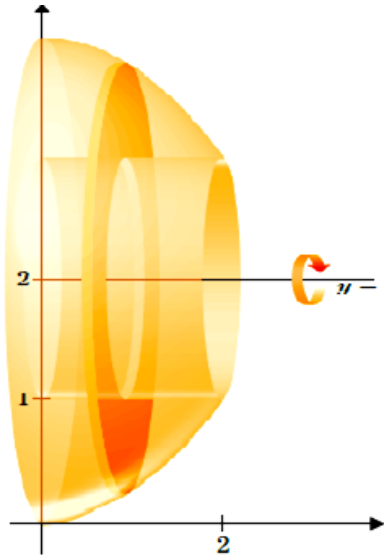
(b) المحور x





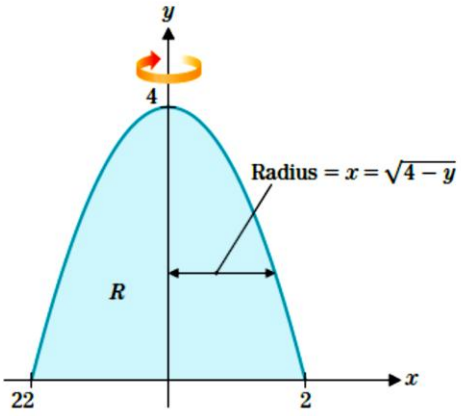
(c) المستقيم $y = 2$.

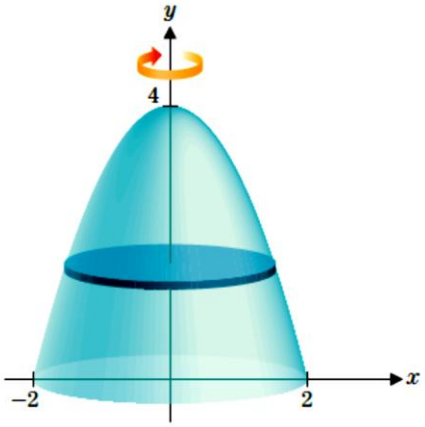




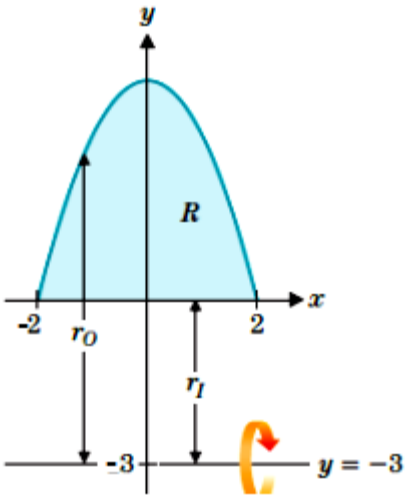
27 لتكن R هي المنطقة المحدودة بواسطة $y = 4 - x^2$ و $y = 0$. جـــد أحجام المجسّمات التي تم الحصول عليها من دوران R حول كل من التالي:

(a) المحور y

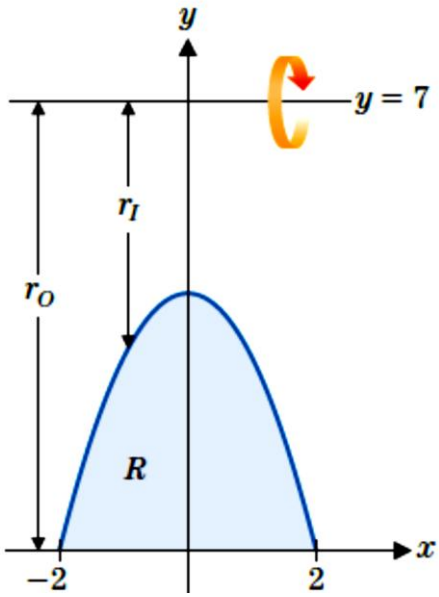




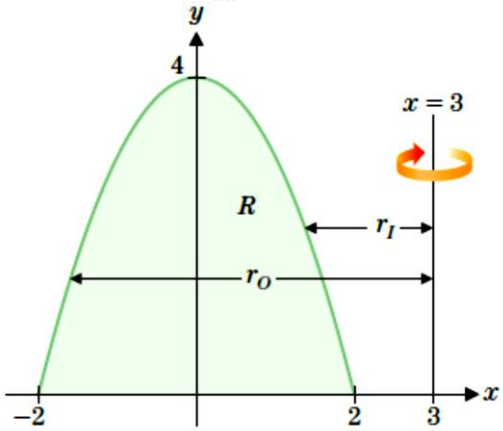
(b) المستقيم $y = -3$



(c) المستقيم $y = 7$



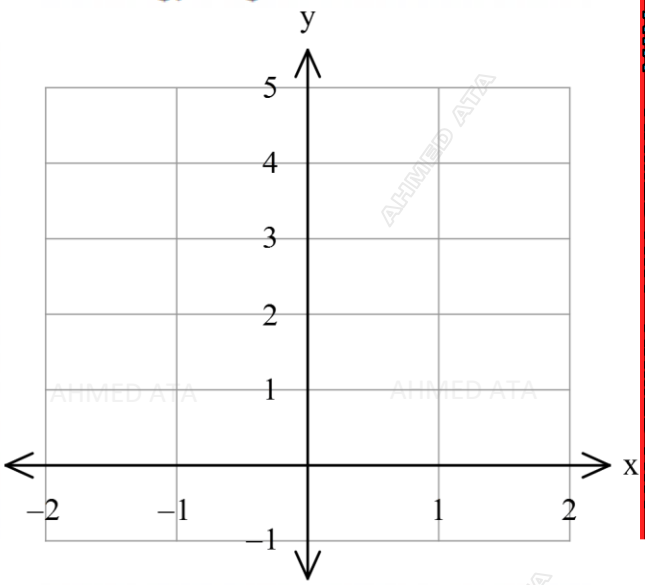
(d) المستقيم $x = 3$.



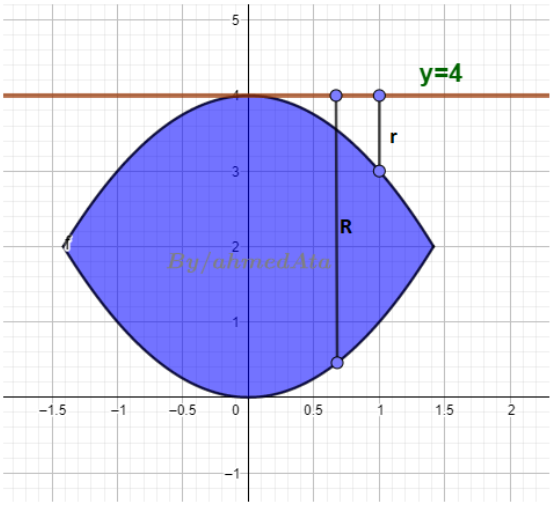
28 احسب حجم المجسّم الذى تكوّن من دوران المنطقة المذكورة حول المستقيم المذكور.

المنطقة المحدودة بواسطة $y = x^2, y = 4 - x^2$ حول

(a): المحور x



(b) y = 4

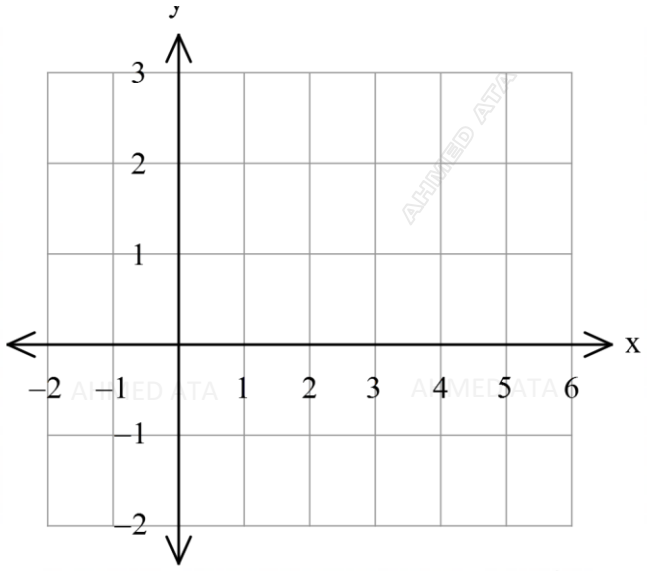


AHMED ATA
The Featured program

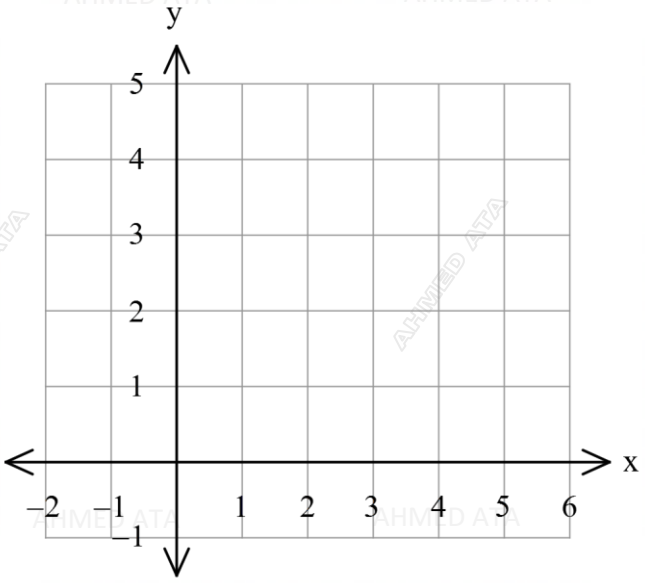
29 احسب حجم المجسّم الذي تكوّن من دوران المنطقة المذكورة حول المستقيم المذكور.

المنطقة المحدودة بواسطة $y = \sqrt{x}, y = 2$ و $x = 0$ حول

$(a)\ y - axis$



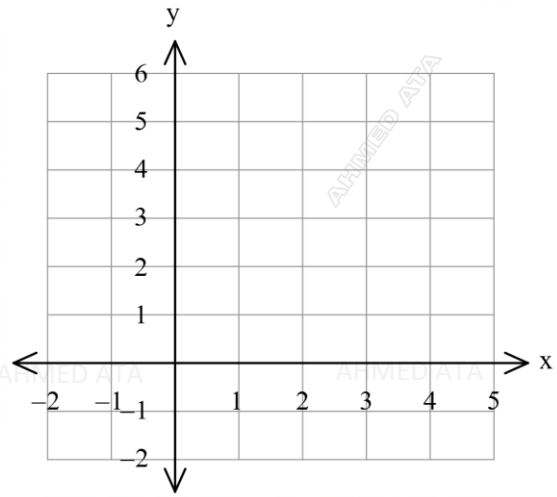
$(b)\ y = 4$



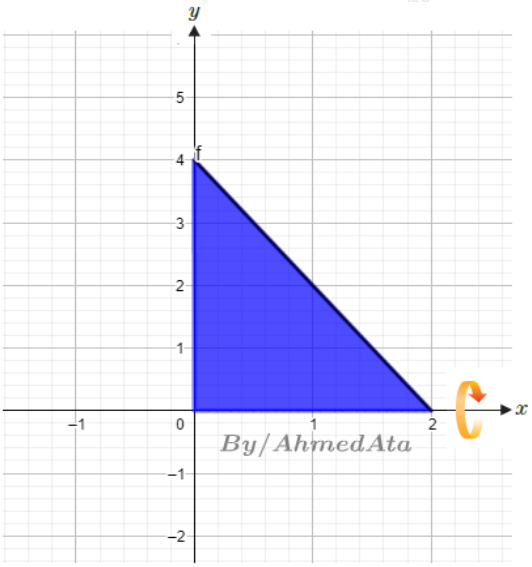
30

لتكنّ R هي المنطقة المحدودة بواسطة $y = 4 - 2x$ والمحور x والمحور y.
احسب حجم المجسّم الذي تكوّن من دوران R حول المستقيم المذكور.

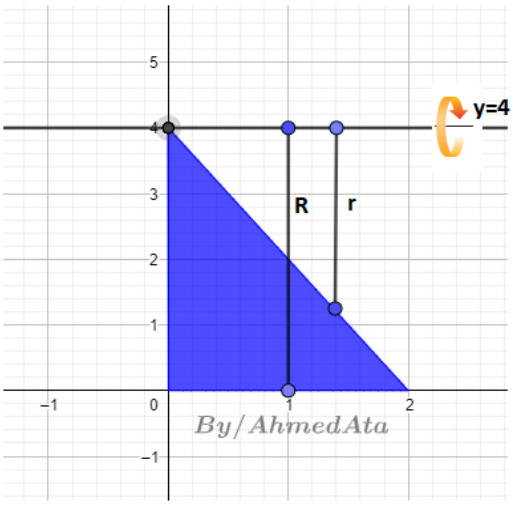
(a) $y - axis$



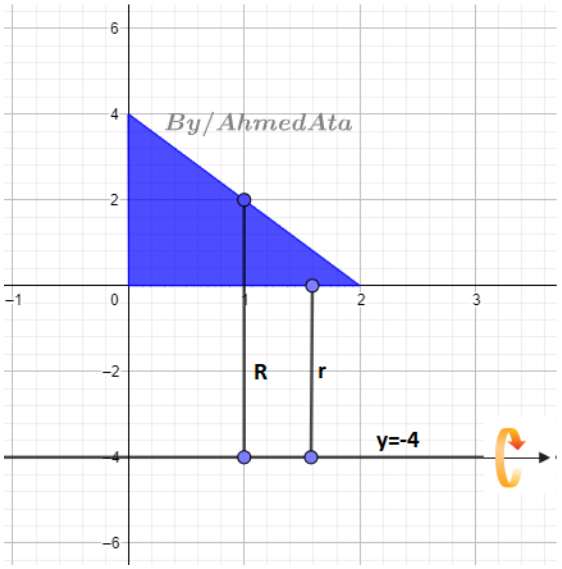
(b) $x - axis$



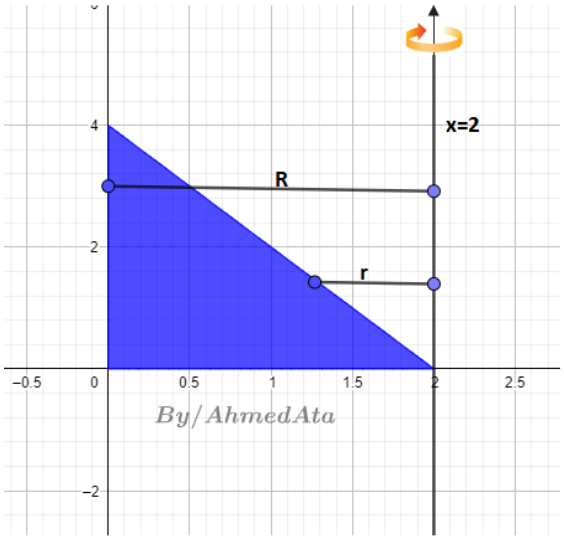
(c) $y = 4$



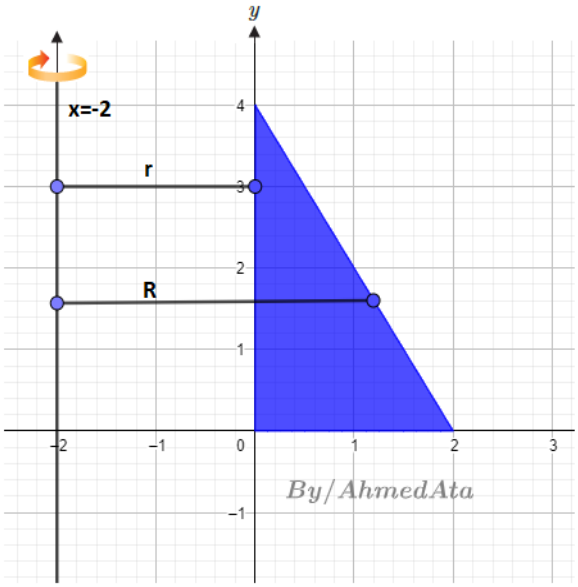
$(d)\ y = -4$



$(e)\ x = 2$

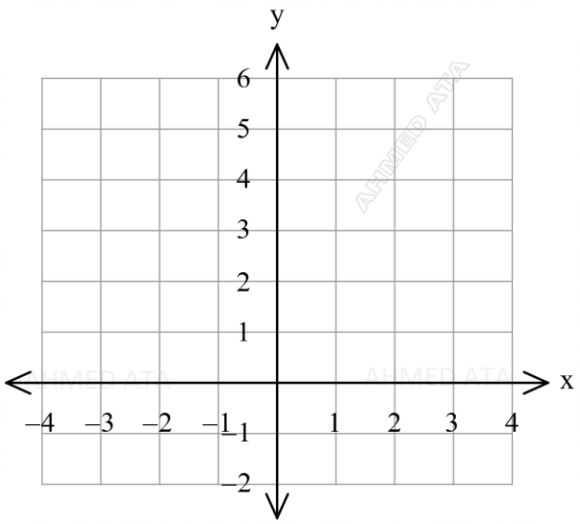


$(f)\ x = -2$

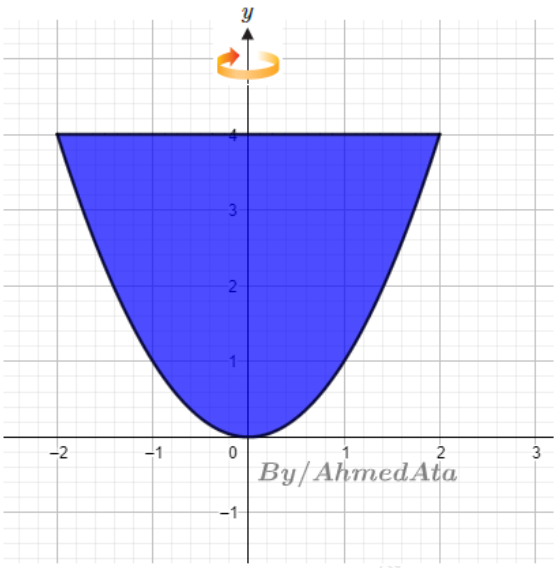


31 لتكن R هي المنطقة المحدودة بواسطة $y = x^2$ و $y = 4$.
أحسب حجم المجسّم الذي تكوّن من دوران R حول المستقيم المذكور.

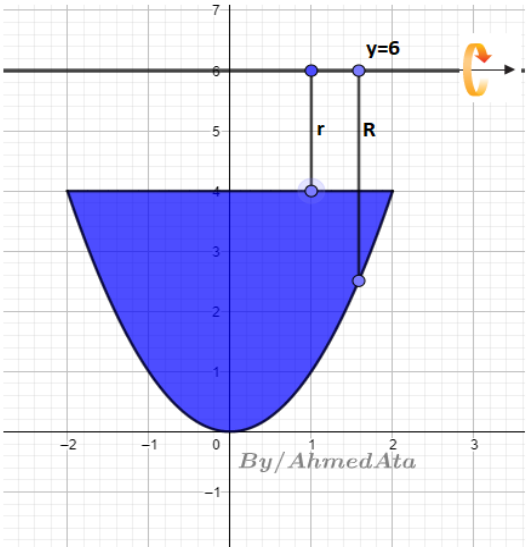
$(a)\ y = 4$



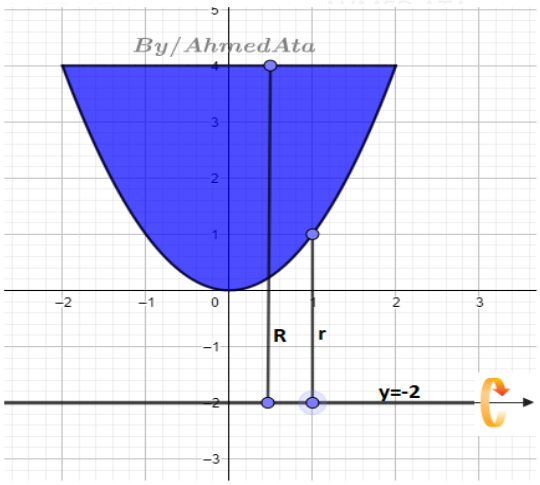
(b) *the* $y-$ *axis*



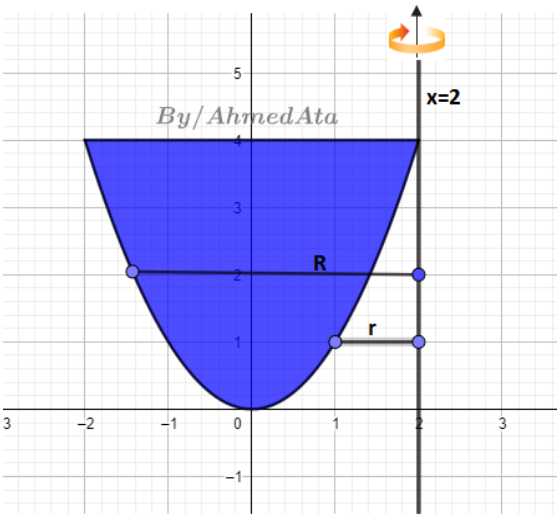
$(c) y = 6$



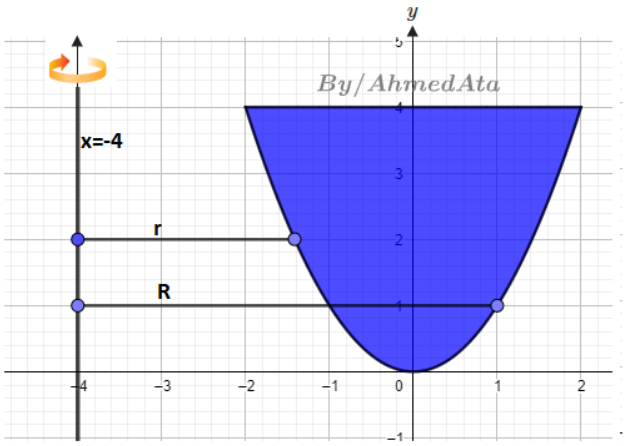
$(d)\ y = -2$



$(e)\ x = 2$



$(f)\ x = -4$



THE FEATURED
PROGRAM EDUCATION

البرنامج المميز

MATH ARB

الثاني عشر متقدم

الدرس (6-4)

طول القوس ومساحة السطح

Mr. Ahmed Ata
The Featured Program
2025-2026

البرنامج المميز طريقك للتميز

Prepared by :

MR- AHMED ATA

@AHMEDATACHAT

https://t.me/ahmedatachat
0566010255 -0502070147
ahmatta.math@gmail.com
UAE - ABU DHABI

الدرس (6-4)

طول القوس ومساحة السطح

طول القوس

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx,$$

1 جـــد طول القوس الخاص بجزء من منحنى $y = \sin x$ مع $0 \le x \le \pi$.

2 جـــد طول قوس لجزء من منحنى $y = x^2$ مع $0 \le x \le 1$.

احسب طول المنحنى بدقة

3 $y = 2x + 1, 0 \le x \le 2$

4 $y = 4x^{3/2} + 1, 1 \le x \le 2$

5 $y = \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x}), 0 \le x \le 1$

6 $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x, 1 \le x \le 2$

7 $y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2x}, 1 \le x \le 3$

8 $x = \frac{1}{8}y^4 + \frac{1}{4y^2}, -2 \le y \le -1$

9 $y = 2\ln(4 - x^2), 0 \le x \le 1$

10 $y = x^3, -1 \le x \le 1$

11 $y = \tan x, 0 \le x \le \pi/4$

12 $y = \cos x, 0 \le x \le \pi$

13 $y = \ln x, 1 \le x \le 3$

14 $y = \int_0^x u \sin u \, du, 0 \le x \le \pi$

15 $y = \int_0^x e^{-u} \sin u \, du, 0 \le x \le \pi$

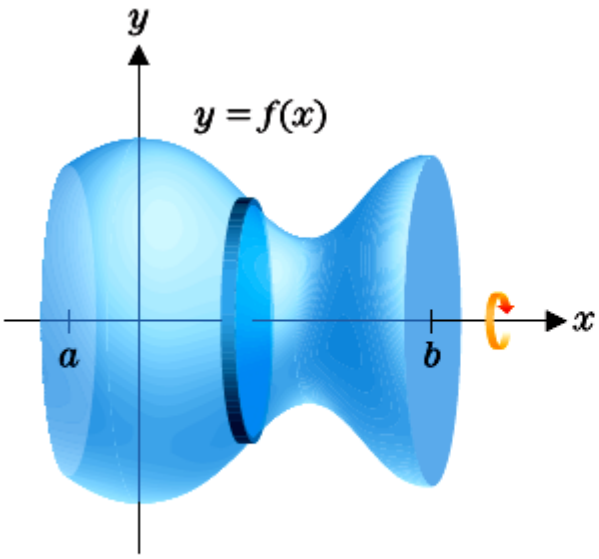
16 عند تعليق حبل بين عمودين البعد بينهما 40 ft. إذا كان الحبل يبدو أنّه يتخذ شكل سلسلة معادلته $y = 10(e^{x/20} + e^{-x/20})$، $-20 \le x \le 20$ فاحسب طول الحبل.

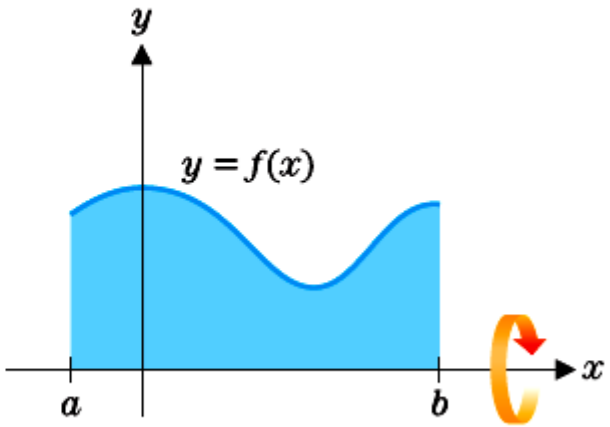
AHMED ATA

17 عند تعليق حبل بين عمودين البعد بينهما 60 ft. إذا كان الحبل يبدو أنّه يتخذ شكل سلسلة معادلته $y = 15(e^{x/30} + e^{-x/30})$، $-30 \le x \le 30$ فاحسب طول الحبل.

احسب قيمة "الارتخاء" الموجودة في الكابل

مساحة السطح





الدوران حول المحور x

$$S = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx,$$

ضع التكامل لمساحة السطح الناتج من الدوران

18 $y = x^2$، $0 \le x \le 1$، تم دورانها حول المحور x

19 $y = \sin x$، $0 \le x \le \pi$، تم دورانها حول المحور x

20 $y = 2x - x^2$، $0 \le x \le 2$، تم دورانها حول المحور x

21 $y = x^3 - 4x$، $-2 \le x \le 0$، تم دورانها حول المحور x

22 $y = e^x$، $0 \le x \le 1$، تم دورانها حول المحور x

23 $y = \ln x$، $1 \le x \le 2$، تم دورانها حول المحور x

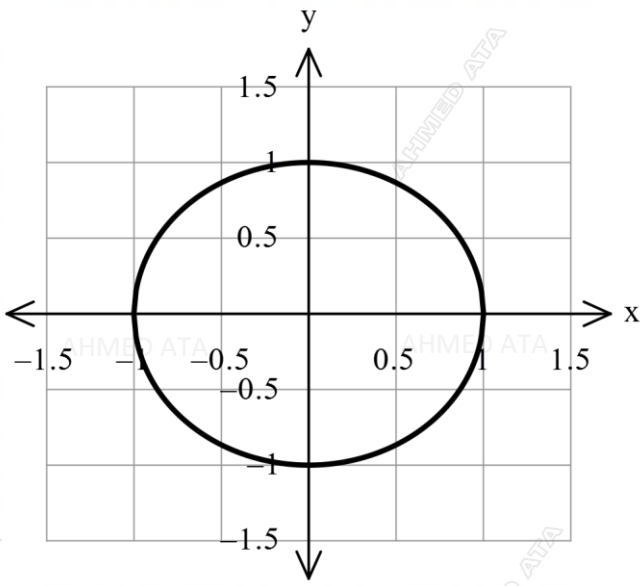
24 $y = \cos x$، $0 \le x \le \pi/2$، تم دورانها حول المحور x

25 $y = \sqrt{x}$، $1 \le x \le 2$، تم دورانها حول المحور x

26 احسب طول القوس L_1 للمنحنى وطول L_2 للمستقيم القاطع الذي يربط نقاط النهاية بالمنحنى. احسب النسبة L_2/L_1

$$y = \sin x, -\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{6}$$

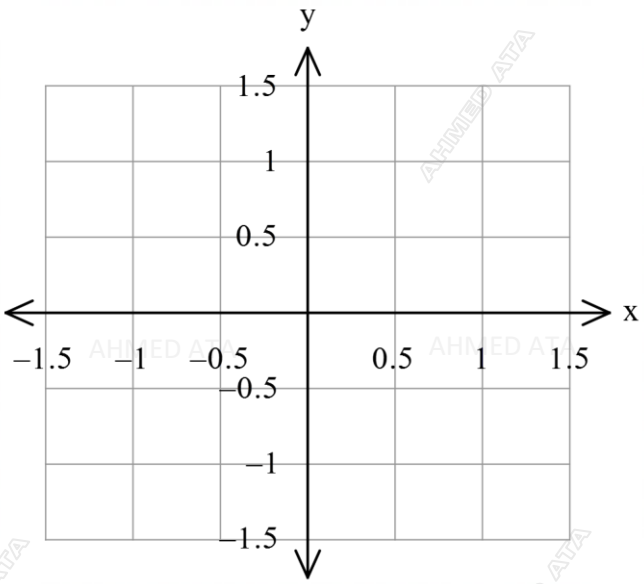
27 على فرض أنّه تمّ تدوير الدائرة $x^2 + y^2 = 1$ حول المحور y.
احسب مساحة السطح.



AHMED ATA
The Featured program

28

على فرض أنّه تمّ تدوير المثلث رؤوسه $(-1, -1)$ و $(0, 1)$ و $(1, -1)$ حول المحور y احسب مساحة السطح.



THE FEATURED
PROGRAM EDUCATION

البرنامج المميز

MATH ARB

الثاني عشر متقدم

الدرس (6-5)

حركة المقذوفات

Mr. Ahmed Ata
The Featured Program
2025-2026

البرنامج المميز طريقك للتميز

Prepared by :

MR- AHMED ATA

@AHMEDATACHAT

https://t.me/ahmedatachat
0566010255 -0502070147
ahmatta.math@gmail.com
UAE - ABU DHABI

الدرس (5-6)

حركة المقذوفات

قانون نيوتن الثاني يعطينا $h''(t) = -g$

$g = 9.8\ m/s^2$ or $g = 32\ ft/s^2$

$x(t) = v_0 t + x_0$ $\quad$ $hint: h(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + h_0$

1 الشروط الابتدائية $y(0)$ و $y'(0)$

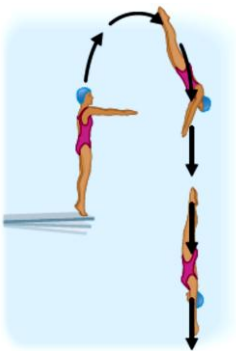
a) أُسقِط جسم من ارتفاع 80 ft

b) أُسقِط جسم من ارتفاع 100 ft

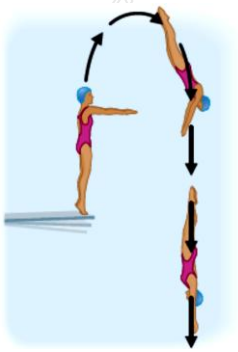
c) أطلق جسم من ارتفاع 60 ft مع سرعة متجهة صعوداً 10 ft/s .

d) أطلق جسم من ارتفاع 20 ft ع سرعة متجهة نزولاً 4 ft/s

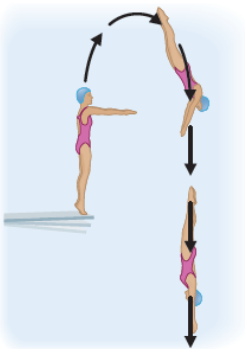
2 إذا كان ارتفاع لوح الغطس 4.5 m فوق مستوى سطح المياه وبدأ الغواص بسرعة متجهة ابتدائية 2.4 m/s (في اتجاه لأعلى)، كم بلغت السرعة المتجهة للغواص عند الاصطدام (بافتراض عدم وجود مقاومة هواء)؟



3 يسقط غطاس من ارتفاع 30 ft فوق الماء (ارتفاع منصة الغطس الأولمبية نفسه تقريبًا).
ما السرعة المتجهة للغطاس لحظة الاصطدام؟



4 يسقط غطاس من ارتفاع 120 ft فوق الماء (ارتفاع منصة الغطس فى مسابقة Acapulco Cliff Diving نفسه تقريبًا).
ما السرعة المتجهة للغطاس لحظة الاصطدام؟



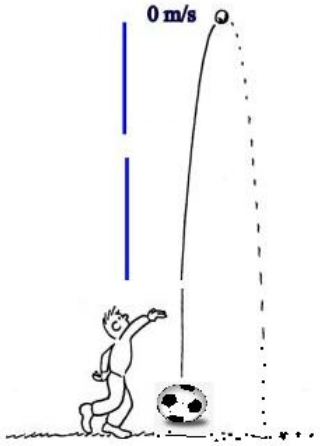
AHMED ATA

5 تم قذف كرة للأعلى بشكل مستقيم من الأرض بسرعة متجهة ابتدائية $19.6\ m/s$. بتجاهل مقاومة الهواء،

جـــــد معادلة لارتفاع الكرة عند أي زمن t.

وأيضًا حدّد القيمة العظمى للإرتفاع

ومقدار الزمن الذي قطعته الكرة في الهواء.



6 اكتشف ذئب بري أنه قد خطا خارج حافة جرف. بعد أربع ثوانٍ، اصطدم بالأرض في سحابة من الغبار. ما ارتفاع الجرف بالأمتار؟

7 يتضمّن المخطط التالي للذئب البري إطلاق نفسه في الهواء باستخدام منجنيق.

إذا تم دفع الذئب البري رأسيًا من الأرض بسرعة متجهة ابتدائية $19.6\ m/s$

a جـــــد معادلة لارتفاع الذئب في أي زمن t.

b جـــــد أقصى ارتفاع له

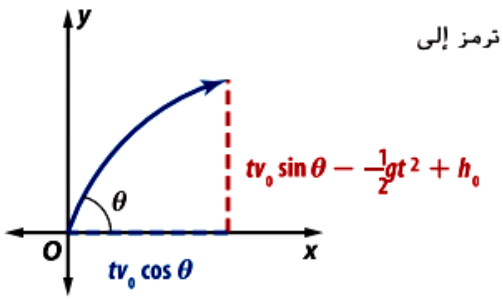
c مقدار الزمن الذي يمضيه في الهواء

d سرعته المتجهة عندما يرتد بقوة مرة أخرى إلى داخل المنجنيق.

AHMED ATA The Featured program

المفهوم الأساسي حركة المقذوف

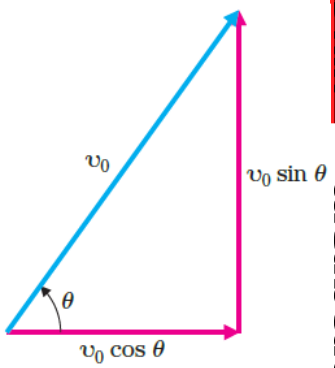
أطلق جسم صانعًا زاوية θ مع خط الأفق وبسرعة متجهة ابتدئية v_0، حيث g ترمز إلى ثابت الجاذبية الأرضية، و tترمز إلى الزمن و h_0 ترمز إلى الارتفاع الابتدائي:



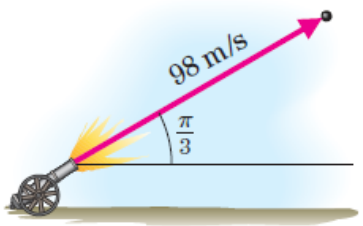
المسافة الأفقية $x = tv_0 \cos\theta$

الموقع الرأسي $y = tv_0 \sin\theta - \frac{1}{2}gt^2 + h_0$

8 يتم إطلاق جسم أفقيًا بزاوية $\theta = \pi/6$ حيث سرعته الابتدائية $v_0 = 98$ m/s. حدّد زمن الانطلاق ومدى المقذوف (الأفقي).



9 يطلق جسم ما بزاوية $\theta = \pi/3$ راديان من الأفق مع سرعة ابتدائية 98 m/s.
حدّد زمن التحليق والمدى الأفقي.

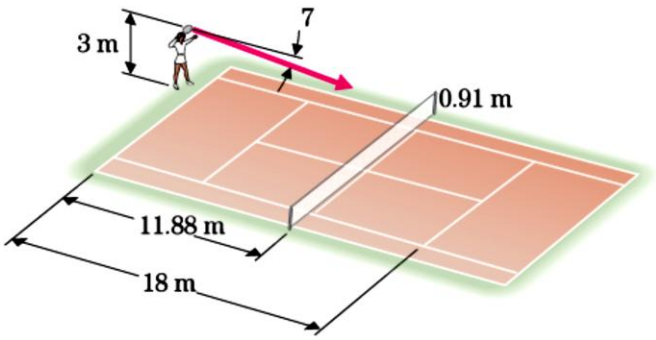


10 جـــــد زمن التحليق والمدى الأفقي لجسم أطلق بزاوية 30° مع سرعة ابتدائية 40 m/s.

11 يخطط مخاطر للقفز فوق 25 سيارة. إذا كانت السيارات كلها سيارات مدمجة بعرض 5 ft وزاوية الانحدار هي 30°، حدّد السرعة المتجهة الابتدائية الضرورية لإتمام القفزة بنجاح.

12

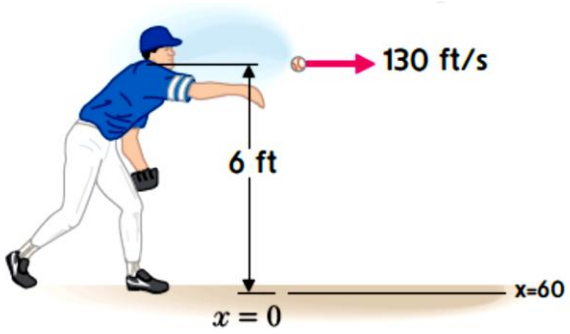
فينوس وليامز واحدة من أسرع الضربات في تنس السيدات. على فرض أنّها سددت ضربة من ارتفاع 3 أمتار بسرعة ابتدائية $190\,km/h$ وبزاوية $7°$ تحت المركّبة الأفقية. تكون الضربة موجهة "داخل الحد" إذا مرت الكرة على شبكة ارتفاعها $0.91\,m$ وتبعد مسافة $18\ m$ وترتطم بالأرض أمام خط التسديد على بُعد $18\,m$. (نوضّح ذلك الموقف في الشكل 6.46). حدّد ما إذا كانت الضربة داخل أو خارج الحد.



13 يُطلق ضارب كرة بيسبول الكرة أفقيًا من ارتفاع 6 ft مع سرعة ابتدائية 130 ft/s.

جـــــد ارتفاع الكرة عندما تصل إلى القاعدة الرئيسة على بعد 60 ft.

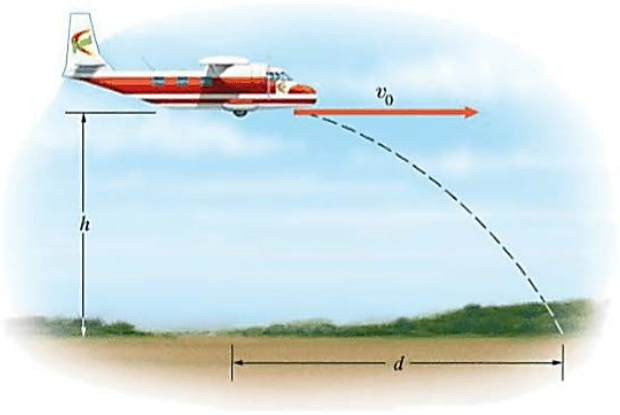
(إرشاد: حدد زمن التحليق من المعادلة x-، ثم استخدم المعادلة y- لتحديد الارتفاع).



14

تريد طائرة على ارتفاع 256 ft إسقاط إمدادات إلى موقع معيّن على الأرض. إذا كان للطائرة سرعة أفقية 100 ft/s، فما المسافة التي ينبغي أن تبعدها الطائرة عن الهدف عند إطلاق الإمدادات من أجل أن تسقط في الموقع المستهدف؟

(إرشاد: استخدم المعادلة y- لتحديد زمن التحليق، ثم استخدم المعادلة x- لتحديد إلى المدى الذى ستنجرف إليه الإمدادات).



معادلة لحركة قذيفة جنونية

قانون نيوتن الثاني المطبق على الحركة الجانبية لقذيفة الكرة الجنونية

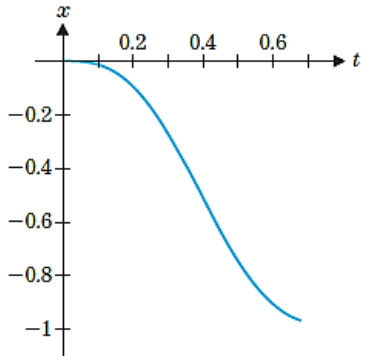
$$mx''(t) = -0.1\,sin(4\theta).$$

كتلة كرة البيسبول حوالي $0.098\ kg$ لدينا الأن

$$x''(t) = -10\,sin(4\omega t + \theta_0)$$

مع شروط ابتدائية $x'(0) = 0$ و $x(0) = 0$

15 لمعدل دوران $\omega = 2$ راديان في الثانية مع $\theta_0 = 0$. جـــد معادلة الحركة الجانبية لقذيفة جنونية ومثّلها بيانيًا لكل $0 \le t \le 0.68$.



16 $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$