THE FEATURED
PROGRAM EDUCATION

البرنامج المميز

MATH ARB

الثاني عشر متقدم

CHAPTER 5

Mr. Ahmed Ata
The Featured Program

2025-2026

البرنامج المميز طريقك للتميز

Prepared by :

MR- AHMED ATA

@AHMEDATACHAT

https://t.me/ahmedatachat

0566010255 -0502070147

ahmatta.math@gmail.com

UAE - ABU DHABI

5 - التكامل

1 الدوال الأصلية

2 المجموع والرمز سيجما

3 المساحة

4 التكامل المحدود

5 النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل

6 التكامل بالتعويض

7 التكامل العددي

8 اللوغاريتم الطبيعي كتكامل

THE FEATURED PROGRAM EDUCATION

البرنامج المميز

الثاني عشر متقدم

MATH ARB

Mr. Ahmed Ata
The Featured Program

الدرس (5-1)

الدوال الاصلية

Mr. Ahmed Ata
The Featured Program

2025-2026

البرنامج المميز طريقك للتميز

Prepared by :

MR- AHMED ATA

@AHMEDATACHAT

https://t.me/ahmedatachat

0566010255 -0502070147

ahmatta.math@gmail.com

UAE - ABU DHABI

الدرس (5-1)

الدوال الاصلية

النظرية 1.1

على فرض أنّ F و G هما دالتان أصليّتان لـ f على الفترة I . إذًا،

$$G(x) = F(x) + c$$

لكل عدد ثابت c.

التعريف 1.1

لتكن F دالة أصليّة لـ f على الفترة I. **التكامل غير المحدود** لـ $f(x)$ (بمعلومية x) على I. يُعرّف بواسطة

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

حيث c هو عدد ثابت اضافي (**ثابت التكامل**).

النظرية 1.2 (قاعدة القوة)

لأي قوة نسبية $r \neq -1$.

$$\int x^r\,dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c$$

هنا، إذا كان $r < -1$ ، فالفترة I التي يكون عليها هذا مُعرّفا يمكن أن تكون فترة لا تتضمن $x = 0$.

النظرية 1.3

على فرض أنّ $f(x)$ و $g(x)$ لهما دوال أصليّة. إذًا، لأي عددين ثابتين، a و b.

$$\int [af(x) + bg(x)]\,dx = a\int f(x)\,dx + b\int g(x)\,dx$$

$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c,$ لكل $r \neq -1$ (قاعدة القوة)	$\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + c$
$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$	$\int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + c$
$\int \cos x \, dx = \sin x + c$	$\int e^x \, dx = e^x + c$
$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + c$	$\int e^{-x} \, dx = -e^{-x} + c$
$\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + c$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + c$
$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + c$	$\int \frac{1}{\|x\|\sqrt{x^2-1}} dx = \sec^{-1} x + c$

النظرية 1.4

لكل $x \neq 0$، $\frac{d}{dx} \ln |x| = \frac{1}{x}$

النتيجة 1.1

في أي فترة لا تحتوي على 0.

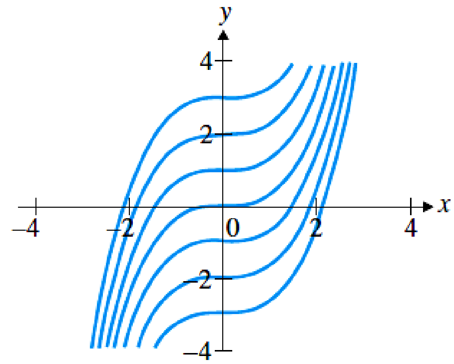
$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$$

النتيجة 1.2

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c$$

في أي فترة تكون فيها $f(x) \neq 0$.

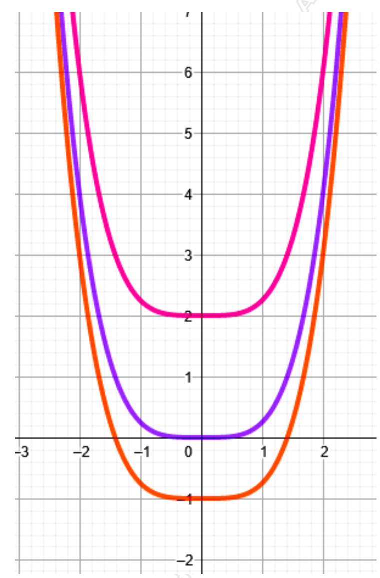
1 $f(x) = x^2$ أوجد الدالة الأصلية



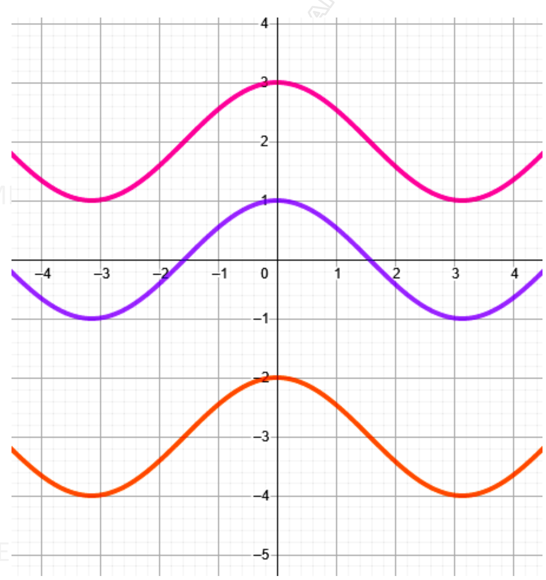
A family of antiderivative curves

ارسم عددًا من الدوال ضمن عائلة الدوال المُعرَّفة بالدالة الأصليّة.

2 $\int x^3 \, dx$



3 $\int -\sin x \, dx$



أوجد الدالة الأصلية

4 $\int (3x^4 - 3x)\,dx$

5 $\int \left(3\sqrt{x} - \frac{1}{x^4}\right)dx$

6 $\int \frac{x^{1/3} - 3}{x^{2/3}}\,dx$

7 $\int (2\sin x + \cos x)\,dx$

8 $\int 2\sec x \tan x\,dx$

9 $\int \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

10 $\int 4\frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx$

11 $\int 5\sec^2 x\,dx$

12 $\int (3e^x - 2)\,dx$

13 $\int (3\cos x - 1/x)\,dx$

14 $\int (2x^{-1} + \sin x)\,dx$

15 $\int \frac{4x}{x^2+4}\,dx$

16 $\int \frac{3}{4x^2+4}\,dx$

17 $\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$

18 $\int \left(2\cos x - \sqrt{e^{2x}}\right) dx$

19 $\int \frac{e^x}{e^x+3}\,dx$

20 $\int \frac{e^x+3}{e^x}\,dx$

21 $\int x^{1/4}(x^{5/4}-4)\,dx$

22 $\int x^{2/3}(x^{-4/3}-3)\,dx$

23 $\int \left(\sqrt{x^3}+4\right) dx$

24 $\int \frac{3x^2-4}{x^2} dx$

25 $\int \sec^2 x \, dx$

26 $\int \left(\frac{1}{x^2}-1\right) dx$

27 أوجد المشتقة

a $\frac{d}{dx} \ln|\sec x+\tan x|$

b $\frac{d}{dx} \ln|\sin x \cdot 2|$

جـــد الدالة $f(x)$ التي تحقق الشروط المعطاة.

28 $f'(x) = 3e^x + x, \qquad f(0) = 4$

29 $f'(x) = 4\cos x, \qquad f(0) = 3$

30 $f''(x) = 12x^2 + 2e^x, \qquad f'(0) = 2, \qquad f(0) = 3$

31 $f''(x) = 2 + 2t, \qquad f(0) = 2, \qquad f(3) = 2$

32 $f''(x) = 4 + 6t, \qquad f(1) = 3, \qquad f(-1) = -2$

33 $f''(x) = 3\sin x + 4x^2$

34 حدد الدالة المكانية إذا كانت دالة السرعة المتجهة هي $v(t) = 3 - 12t$ والموقع الابتدائي هو $s(0) = 3$.

35 حدد الدالة المكانية إذا كانت دالة السرعة المتجهة هي $v(t) = 3e^{-t} - 2$ والموقع الابتدائي هو $s(0) = 0$.

36 حدد الدالة المكانية إذا كانت دالة التسارع هي $a(t) = 3\sin t + 1$، والسرعة المتجهة الابتدائية هي $v(0) = 0$ والموقع الابتدائي هو $s(0) = 4$.

37 حدد الدالة المكانية إذا كانت دالة التسارع هي $a(t) = t^2 + 1$،
والسرعة المتجهة الابتدائية هي $v(0) = 4$ والموقع الابتدائي هو $s(0) = 0$.

38 جد دالة أصليّة إذا عكست قاعدة السلسلة أو قاعدة ناتج الضرب أو قاعدة ناتج القسمة

a $\int xsin2x + x^2cos2x\,dx$

b $\int \frac{2xe^{3x} - 3x^2e^{3x}}{e^{6x}}\,dx$

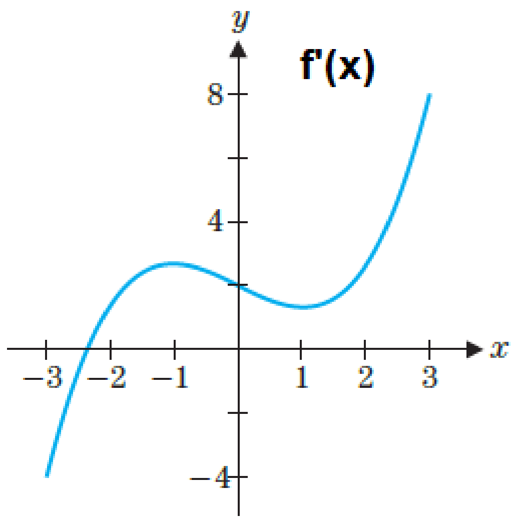
c $\int \frac{xcosx^2}{sinx^2}\,dx$

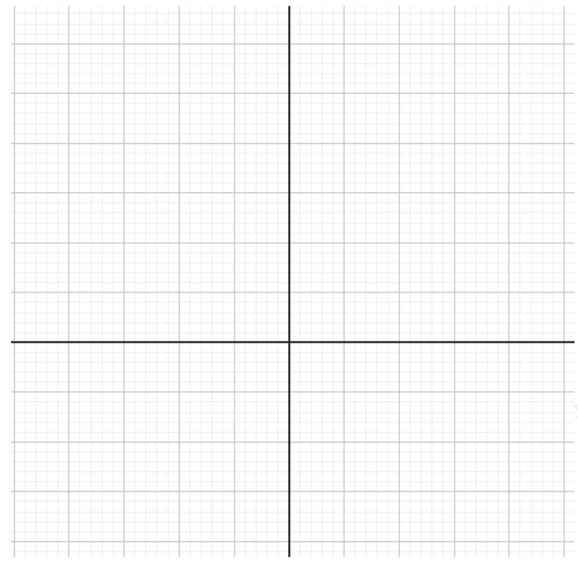
39 جـــد دالة $f(x)$ تكون فيها النقطة $(1, 2)$ على التمثيل البياني لـ $y = f(x)$ ، وميل المماس عند $(1, 2)$ هو 3 و $f''(x) = x - 1$.

40 جـــد دالة $f(x)$ تكون فيها النقطة $(-1, 1)$ على التمثيل البياني لـ $y = f(x)$، وميل المماس عند $(-1, 1)$ هو 2 و $f''(x) = 6x + 4$.

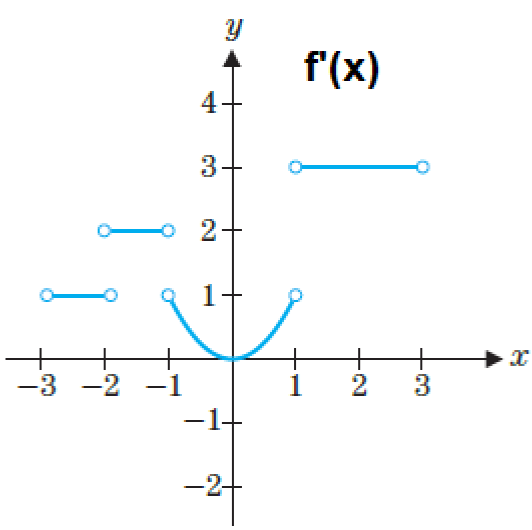
41 تسارع جسمٍ عند الهبوط هو $y''(t) = -9.8\ \text{m/s}^2$، على فرض أنّ السرعة المتجهة الابتدائية هي $y'(0) = -30\ \text{m/s}$ والموقع الابتدائي هو $y(0) = 30{,}000\ \text{m}$، جـــد الدالة المكانية $y(t)$.

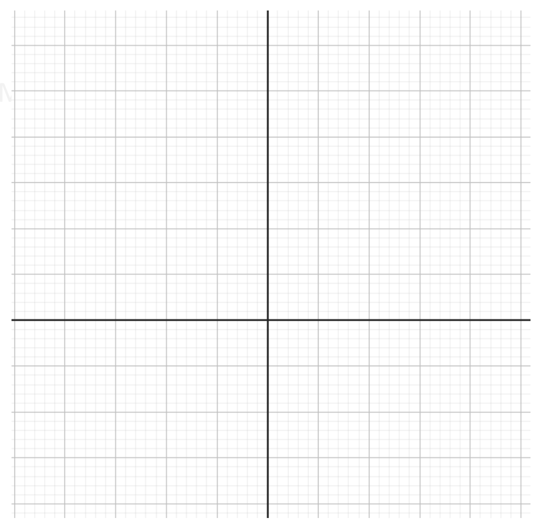
42 ارسم التمثيل البياني للدالة $f(x)$ المقابل لرسمة المشتقة $f'(x)$ الموضحة في الرسم حيث $f(x)$ متصلة





43 ارسم التمثيل البياني للدالة $f(x)$ المقابل لرسمة المشتقة $f'(x)$ الموضحة في الرسم حيث $f(x)$ متصلة





تدرب (5-1)

أوجد الدالة الأصلية

1 $$\int \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}dx$$

2 $$\int secx(tanx - secx)dx$$

3 $$\int \frac{sin^2x + cos^2x}{cosx\,cotx}dx$$

4 $$\int \frac{2sinx}{cos^2x} + \frac{cosx}{sin^2x}dx$$

5. $\int \frac{sec^2 x}{tanx} dx$

6. $\int \frac{x^2 + 2x}{x^3 + 3x^2 - 5} dx$

7. $\int \frac{2x + 5}{2x(x + 5)} dx$

8. $\int \frac{2e^x - e^{-x}}{4e^x + 2e^{-x}} dx$

9 $\int (tanx - cotx)dx$

10 $\int 5e^{7x-1}\,dx$

11 $\int 3e^{x}\,(e^{x} - 5)dx$

12 $\int \frac{1}{5+e^{-x}}dx$

13 $\int \frac{1}{1+e^{x}}\,dx$

14 $\int \frac{5x}{2x^{3}+2x}\,dx$

15 $\int \frac{3}{\sqrt{9-9x^{2}}}\,dx$

16 $\int \frac{1}{\sqrt{x^{4}-x^{2}}}\,dx$

17 $\int cos5x\, dx$

18 $\int \frac{sin^2 x}{1 - cosx} dx$

19 $\int \frac{x+1}{x^2+1} dx$

20 $\int secxdx$

THE FEATURED
PROGRAM EDUCATION

البرنامج المميز

MATH ARB

Mr. Ahmed Ata
The Featured Program

الثاني عشر متقدم

الدرس (5-2)

المجموع والرمز سيجما

Mr. Ahmed Ata
The Featured Program

2025-2026

البرنامج المميز طريقك للتميز

Prepared by :

MR- AHMED ATA

@AHMEDATACHAT

https://t.me/ahmedatachat

0566010255 -0502070147

ahmatta.math@gmail.com

UAE - ABU DHABI

الدرس (5-2)

المجموع والرمز سيجما

$$\sum_{i=1}^{20} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 20^2$$

للإشارة إلى أننا نجمع حدودًا معًا لها الصيغة i^2، بدءًا من $i = 1$ وانتهاءً ب $i = 20$. يُسمى المتغيّر i مؤشر المجموع

بصفة عامة، بالنسبة لأي أعداد حقيقية a_1 ، a_2 ، ... ، a_n، يكون لدينا

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

اكتب في صورة رمز المجموع

1. $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{10}$

2. $3^3 + 4^3 + 5^3 + \cdots + 45^3.$

3 $2(1)^2 + 2(2)^2 + 2(3)^2 + \cdots + 2(14)^2$

4 $\sqrt{2-1} + \sqrt{3-1} + \sqrt{4-1} + \cdots + \sqrt{15-1}$

5 اكتب في صورة رمز المجموع: مجموع أول 200 عدد صحيح موجب فردي.

6 مجموع مربّعات أول 50 عددًا صحيحًا موجبًا.

7 مربّع مجموع أول 50 عددًا صحيحًا موجبًا

8 مجموع الجذور التربيعية لأول 10 أعداد صحيحة

9 الجذر التربيعي لمجموع أول 10 أعداد صحيحة موجبة.

اكتب كل الحدود واحسب المجموع

10 $$\sum_{i=1}^{8}(2i+1)$$

11 $$\sum_{i=2}^{6}\sin(2\pi i)$$

12 $$\sum_{i=4}^{10}5$$

13 $\sum_{i=1}^{6} 3i^2$

14 $\sum_{i=3}^{7}(i^2 + i)$

15 $\sum_{i=6}^{10}(4i + 2)$

16 $\sum_{i=6}^{8}(i^2 + 2)$

النظرية 2.1

إذا كان n عددًا صحيحًا موجبًا و c عددًا ثابتًا، فإنّ

(i) $\sum_{i=1}^{n} c = cn$ (مجموع الثوابت)،

(ii) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ (مجموع أول n عدد صحيح موجب) و

(iii) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (مجموع مربعات أول n عدد صحيح موجب).

النظرية 2.2

لأي عددين ثابتين c و d ،

$$\sum_{i=1}^{n}(ca_i + db_i) = c\sum_{i=1}^{n} a_i + d\sum_{i=1}^{n} b_i$$

حساب المجموع باستخدام النظريتين 2.1 و2.2

17 $\sum_{i=1}^{8}(2i+1)$

18 $\sum_{i=1}^{800}(2i+1)$

19 $\sum_{i=1}^{20} i^2$

20 $\sum_{i=1}^{20} \left(\frac{i}{20}\right)^2$

21 $\sum_{i=1}^{70} (3i - 1)$

22 $\sum_{i=1}^{40} (4 - i^2)$

23 $\sum_{n=1}^{100}(n^2 - 3n + 2)$

24 $\sum_{i=4}^{20}(i - 3)(i + 3)$

25 $\sum_{k=3}^{n}(k^2 - 3)$

26 $\sum_{i=3}^{30}[(i - 3)^2 + i - 3]$

احسب المجموع بالصيغة $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ لقيم x_i المعطاة.

27 $f(x) = x^2 + 4x; \quad x = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0; \quad \Delta x = 0.2; \quad n = 5$

28 $f(x) = 3x + 5; \quad x = 0.4, 0.8, 1.2, 1.6, 2.0; \quad \Delta x = 0.4; \quad n = 5$

29 $f(x) = x^3 + 4; \quad x = 2.05, 2.15, 2.25, 2.35, \ldots, 2.95; \quad \Delta x = 0.1; \quad n = 10$

30 جـــد مجموع قيم $f(x) = x^2 + 3$ للقيم عند: $x = 0.1$. $x = 0.2$ . ... . $x = 1.0$.

31 جـــد مجموع قيم $f(x) = 3x^2 - 4x + 2$ للقيم

عند $x = 1.05$ و $x = 1.15$ و $x = 1.25$ و ... $x = 2.95$.

احسب المجموع ونهاية كل مجموع عندما $n \to \infty$.

32 $$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left[\left(\frac{i}{n}\right)^2 + 2\left(\frac{i}{n}\right)\right]$$

33 $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left[\left(\frac{i}{n}\right)^2 - 5\left(\frac{i}{n}\right)\right]$

34 $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left[4\left(\frac{2i}{n}\right)^2 - \left(\frac{2i}{n}\right)\right]$

35 $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left[\left(\frac{2i}{n}\right)^2 + 4\left(\frac{i}{n}\right)\right]$

36 على فرض أنّ سيارة لها سرعة متجهة 50mi/h لمدة ساعتين، وسرعة متجهة 60mi/h لمدة ساعة واحدة، وسرعة متجهة 70mi/h لمدة 30 دقيقة وسرعة متجهة 60mi/h لمدة 3 ساعات. جد المسافة المقطوعة

37 على فرض أنّ سيارة لها سرعة متجهة 50mi/h لمدة ساعة واحدة، وسرعة متجهة 40mi/h لمدة ساعة واحدة، وسرعة متجهة 60mi/h لمدة 30 دقيقة وسرعة متجهة 55mi/h لمدة 3 ساعات. جد المسافة المجتازة

THE FEATURED PROGRAM EDUCATION

البرنامج المميز

الثاني عشر متقدم

MATH ARB

الدرس (5-3)

المساحة

Mr. Ahmed Ata
The Featured Program

2025-2026

البرنامج المميز طريقك للتميز

Prepared by :

MR- AHMED ATA

@AHMEDATACHAT

https://t.me/ahmedatachat

0566010255 -0502070147

ahmatta.math@gmail.com

UAE - ABU DHABI

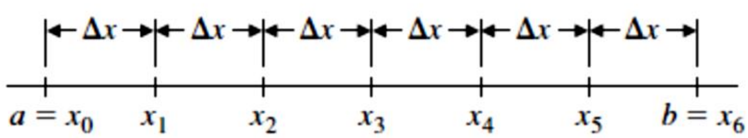
الدرس (5-3)

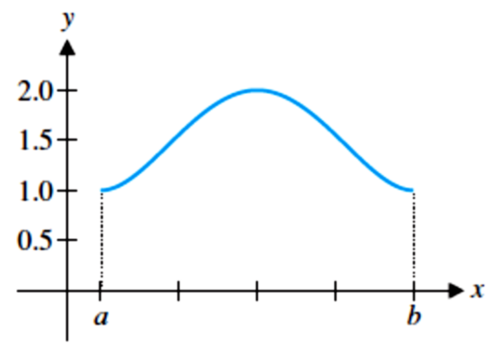
المساحة

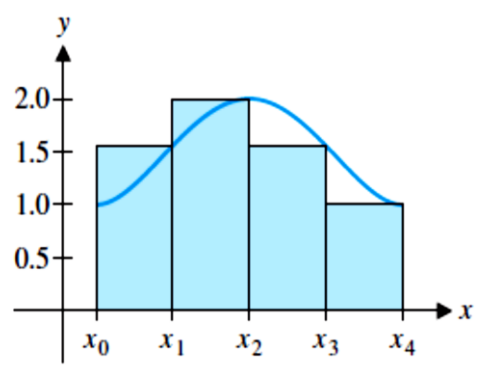
على فرض أولًا أنّ $f(x) \geq 0$ و f دالة متصلة على الفترة $[a, b]$ ، كما هو موضّح في الشكل 5.5. نبدأ بتجزئة الفترة $[a, b]$ إلى n أجزاء متساوية. ويُسمى ذلك **تجزئة منتظمة** لـ $[a, b]$. إذًا، يكون عرض كل فترة جزئية في هذه التجزئة $\frac{b-a}{n}$ ، والذي نرمز إليه بـ Δx (يعني تغيرًا صغيرًا في x). يُرمز

وهكذا بصورة عامة $x_0 = a, \quad x_1 = x_0 + \Delta x, \quad x_2 = x_1 + \Delta x$

$$x_i = x_0 + i\Delta x, \qquad for\ i = 1, 2, \ldots, n$$







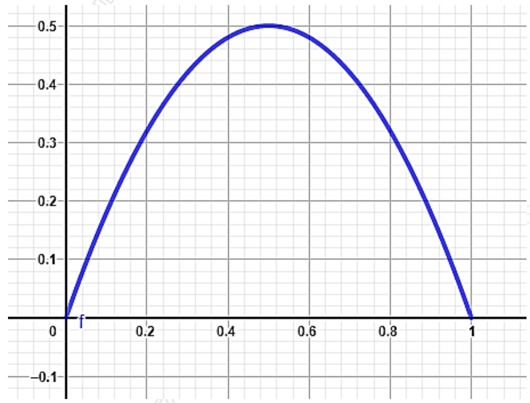
$$A \approx f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + f(x_4)\Delta x = A_4.$$

$$A \approx f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x$$
$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = A_n.$$

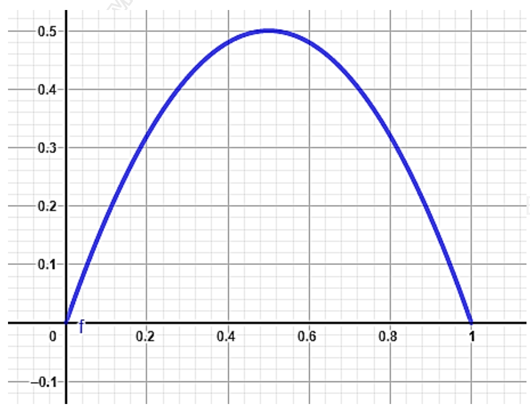
1 أوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة تحت المنحنى $f(x) = 2x - 2x^2$ على الفترة $[0, 1]$ باستخدام 5 مستطيلات

$$A \approx A_5 = \sum_{i=1}^{5} f(x_i)\Delta x =$$

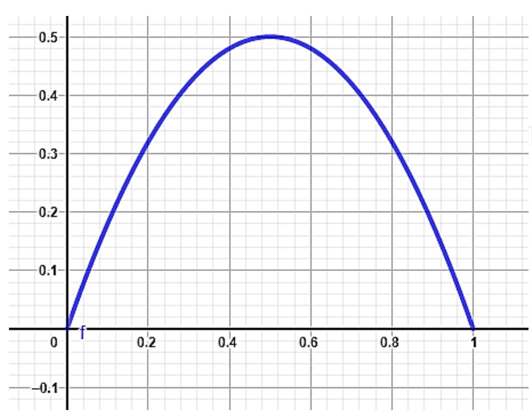
(a) نقطة النهاية اليمنى

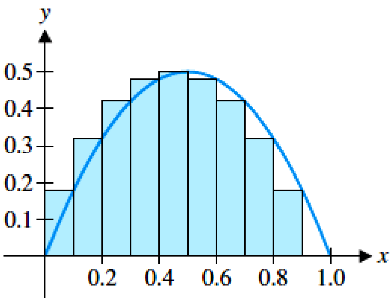


(b) نقطة النهاية اليسرى

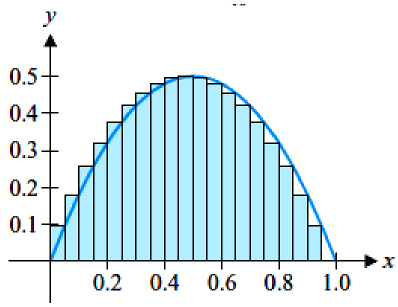


(c) نقطة المنتصف

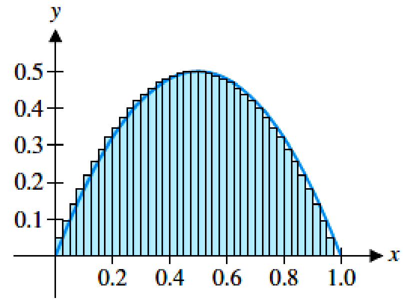




$A \approx A_{10}$



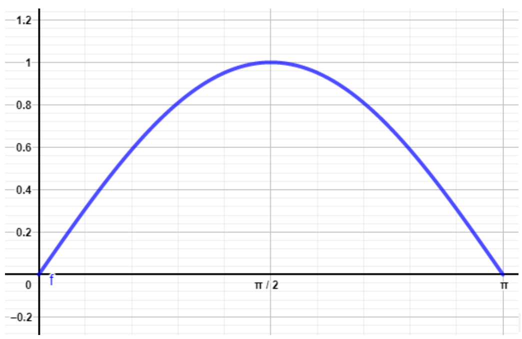
$A \approx A_{20}$



$A \approx A_{40}$

لاحظ أنه كلما كبرت n فأن قيمة A_n تقترب من $\frac{1}{3}$

2 أوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة تحت المنحنى $f(x) = sinx$ على الفترة $[0, \pi]$, باستخدام 4 مستطيلات



a نقطة النهاية اليمنى

b نقطة النهاية اليسرى

c نقطة المنتصف

استخدم قيم الدالة المعطاة لتقدير المساحة تحت المنحنى باستخدام

3

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$f(x)$	2.0	2.4	2.6	2.7	2.6	2.4	2.0	1.4	0.6

a نقطة النهاية اليسرى

b نقطة النهاية اليمنى

4

x	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6
$f(x)$	2.0	2.2	1.6	1.4	1.6	2.0	2.2	2.4	2.0

a نقطة النهاية اليسرى

b نقطة النهاية اليمنى

5 قرب المساحة تحت المنحنى على الفترة المعطاة باستخدام n مستطيلات وقواعد القيم

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$R;\ x_i = a + \Delta x i \qquad L;\ x_i = a + \Delta x(i-1) \qquad M;\ x_i = a + \Delta x\left(i - \frac{1}{2}\right)$

$y = x^2 + 1 \quad on\ [0, 1], \quad n = 16$

a) نقطة النهاية اليمنى

b) نقطة النهاية اليسرى

c) نقطة المنتصف

$y = \sqrt{x + 2}\ on\ [1, 4], n = 16$

a) نقطة النهاية اليمنى

b) نقطة النهاية اليسرى

7 $y = \cos x \quad on\ [0, \frac{\pi}{2}], \quad n = 50$

a) نقطة النهاية اليمنى

b) نقطة المنتصف

التعريف 3.1

لكل دالة f مُعرَّفة على الفترة $[a, b]$. إذا كانت f متصلة على $[a, b]$ و $f(x) \geq 0$ على $[a, b]$.
فإنّ **المساحة A تحت منحنى** $y = f(x)$ على $[a, b]$ تُعطى بالصيغة:

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x \qquad (3.2)$$

التعريف 3.2

لتكن: $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ تجزئة منتظمة للفترة $[a, b]$ ، حيث $x_i - x_{i-1} = \Delta x = \dfrac{b-a}{n}$.
لكل i . اختر النقاط $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ، حيث يكون c_i أي نقطة في الفترة الجزئية $[x_{i-1}, x_i]$.
لكل $i = 1, 2, \ldots, n$. (وهذه النقاط تسمّى **نقاط القيم**). إنّ **مجموع ريمان** لهذه التجزئة ومجموعة نقاط القيم، هو

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x$$

استخدم مجموع ريمان والنهاية لإيجاد قيمة المساحة الدقيقة تحت المنحنى

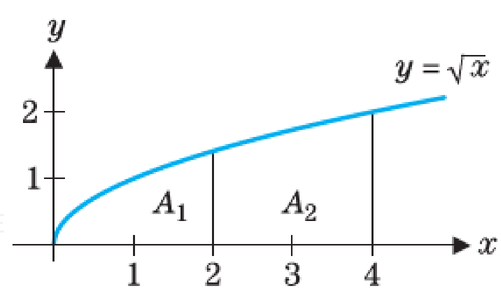
8. $y = 3x \qquad on\ [0, 3]$

9. $y = x^2 + 1 \qquad on\ [0, 1]$

10 $y = x^2 + 3x \qquad on\ [0,2]$

11 $y = 3x^2 \qquad on\ [1,3]$

12 في الشكل المبيّن، أي مساحة تساوي $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{2}\sqrt{1+i/n}\,\frac{2}{n}$



13 وضّح أنّ المساحة تحت منحنى $y = ax^2$ حيث $0 \le x \le b$ هي $\frac{1}{3}$ القاعدة مضروبة في الارتفاع $\left(\frac{1}{3}b \cdot ab^2\right)$

THE FEATURED PROGRAM EDUCATION

البرنامج المميز

الثاني عشر متقدم

MATH ARB

الدرس (5-4)

التكامل المحدود

Mr. Ahmed Ata
The Featured Program

2025-2026

البرنامج المميز طريقك للتميز

Prepared by :

MR- AHMED ATA

@AHMEDATACHAT

https://t.me/ahmedatachat

0566010255 -0502070147

ahmatta.math@gmail.com

UAE - ABU DHABI

الدرس (5-4)

التكامل المحدود

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x,$$

التعريف 4.1

لأي دالة f مُعرّفة على $[a, b]$ ، يكون **التكامل المحدود** لـ f من a إلى b هو

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x$$

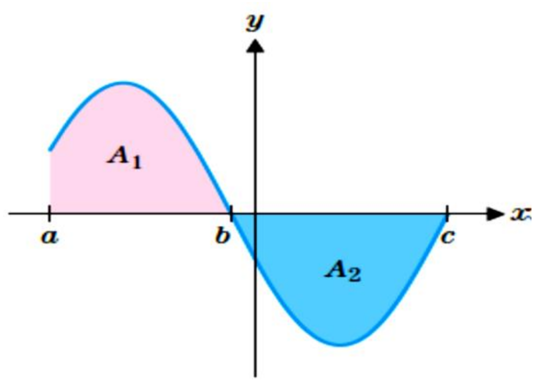
متى وُجدت النهاية والأمر نفسه لكل اختيار من نقاط القيم c_1 ، c_2 ، ... ، c_n . عندما يكون هناك نهاية، نقول إنّ f **قابلة للتكامل** على $[a, b]$.

النظرية 4.1

إذا كانت f متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$ ، فإنّ f تكون قابلة للتكامل على $[a, b]$.

التعريف 4.2

على فرض أنّ $f(x) \geq 0$ على الفترة $[a, b]$ و A_1 هي المساحة المحدودة بين المنحنى $y = f(x)$ ومحور -x لكل $a \leq x \leq b$. علاوةً على ذلك، على فرض أنّ $f(x) \leq 0$ على الفترة $[b, c]$ و A_2 هي المساحة المحدودة بين المنحنى $y = f(x)$ ومحور -x لكل $b \leq x \leq c$. إنّ **المساحة المشار إليها** بين $y = f(x)$ ومحور -x لكل $a \leq x \leq c$ هي $A_1 - A_2$. **والمساحة الإجمالية** بين $y = f(x)$ ومحور -x لكل $a \leq x \leq c$ هي $A_1 + A_2$. (انظر الشكل 5.16).



استخدم قاعدة نقطة المنتصف لتقدير قيمة التكامل باستخدام $n=6$

1 $\int_0^3 (x^3 + x)\, dx$

استخدم قاعدة النهاية اليمنى لتقدير قيمة التكامل باستخدام $n=6$

2 $\int_0^\pi \sin x^2\, dx$

أوجد قيمة التكامل بحساب نهاية مجموع ريمان

3 $\int_0^1 2x\,dx$

4 $\int_1^2 2x\,dx$

5 $\int_0^2 x^2\,dx$

خواص التكامل المحدود

النظرية 4.1

إذا كانت f متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$ ، فإنّ f تكون قابلة للتكامل على $[a, b]$.

إذا كانت f و g قابلتين للتكامل على $[a, b]$ ، فإنّ ما يأتي يكون صحيحًا.

$$\int_a^b k f(x)\, dx = k \int_a^b f(x)\, dx$$

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\ dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$$

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\ dx = \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b g(x)\, dx$$

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$

$$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$$

لتكن f دالة متصلة معرّفة في $[a, b]$. تذكر أنّه بناءً على نظرية القيمة القصوى، وبما أنّ f متصلة، فإنه يوجد فيها قيمة صغرى m، وقيمة عظمى M، في $[a, b]$ ، ومنه

بما أنّ m و M هي قيم ثابتة، فسنحصل على

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\, dx \le M(b-a)$$

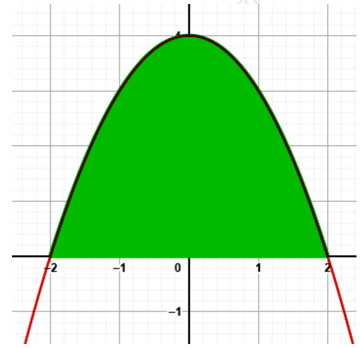
النظرية 4.3

على فرض أنّ $g(x) \le f(x)$ لكل $x \in [a, b]$ وأنّ f و g قابلتان للتكامل على $[a, b]$. إذًا،

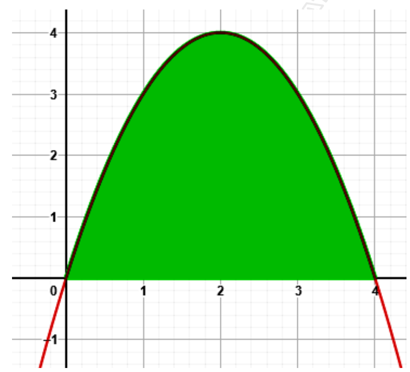
$$\int_a^b g(x)\, dx \le \int_a^b f(x)\, dx$$

أكتب (مجمل) المساحة المعطاة في صورة تكامل أو ناتج جمع تكاملات

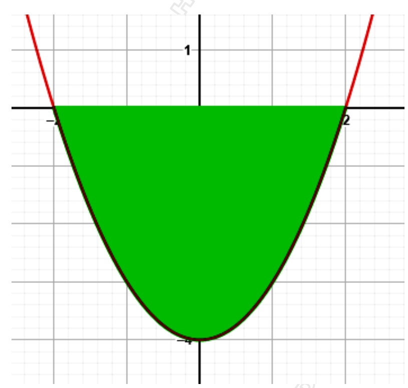
6 المساحة فوق المحور x وتحت $y = 4 - x^2$



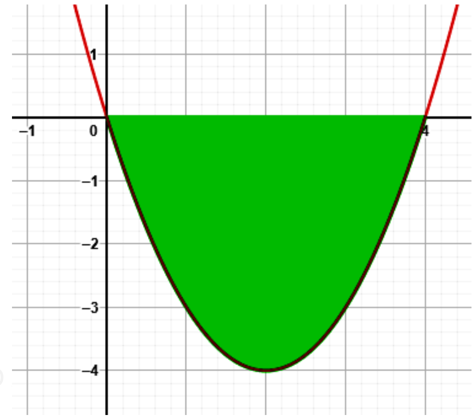
7 المساحة فوق المحور x وتحت $y = 4x - x^2$



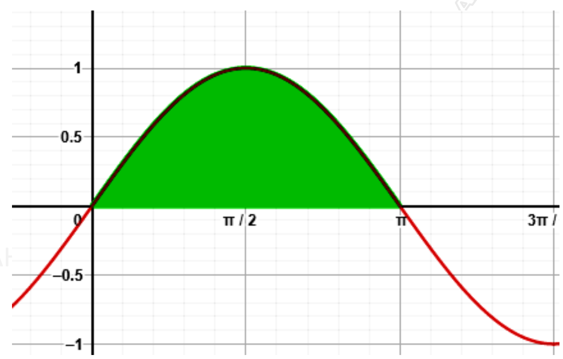
8 المساحة تحت المحور x وفوق $y = x^2 - 4$



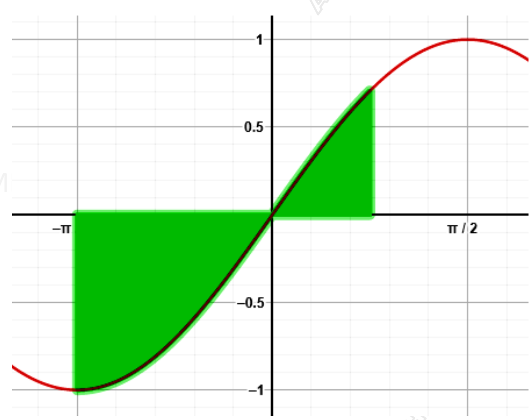
9 المساحة تحت المحور x وفوق $y = x^2 - 4x$



10 المساحة بين $y = \sin x$ والمحور x لـ $0 \le x \le \pi$



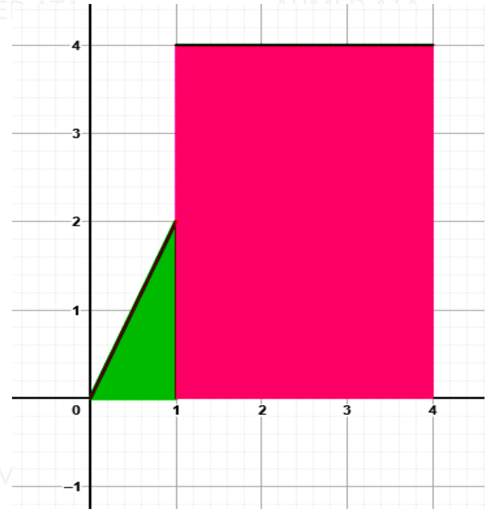
11 المساحة بين $y = \sin x$ والمحور x لـ $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{4}$



احسب $\int_0^4 f(x)\,dx$.

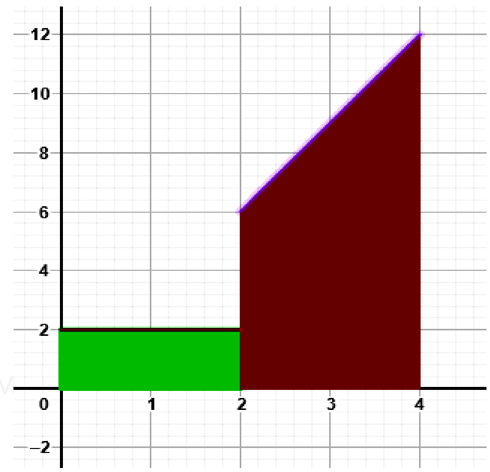
12

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{if } x < 1 \\ 4 & \text{if } x \geq 1 \end{cases}$$



13

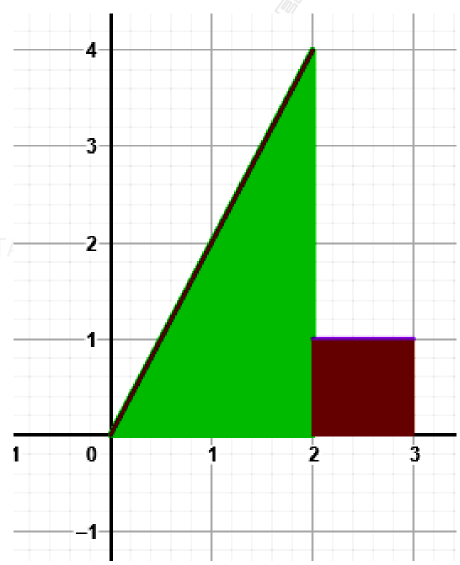
$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{if } x \leq 2 \\ 3x & \text{if } x > 2 \end{cases}$$



جد قيمة $\int_0^3 f(x)\,dx$ ، حيث $f(x)$ تُعرّف كما يأتي:

14

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq 2 \text{ إذا} \\ 1, & x > 2 \text{ إذا} \end{cases}$$



نحصل على تكامل يمثل القيمة المتوسطة

$$f_{\text{ave}} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x\right] = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

النظرية 4.4 (نظرية القيمة المتوسطة في التكامل)

إذا كانت f دالة متصلة على $[a, b]$ ، فإنه يوجد عدد $c \in (a, b)$ من أجله

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

احسب القيمة المتوسطة للدالة في الفترة المعطاة

15 $f(x) = 2x + 1, [0, 4]$

16 $f(x) = x^2 + 2x, [0, 1]$

17 $f(x) = x^2 - 1, [1, 3]$

لتكن f دالة متصلة معرّفة في $[a, b]$. تذكر أنّه بناءً على نظرية القيمة القصوى، وبما أنّ f متصلة، فإنه يوجد فيها قيمة صغرى m، وقيمة عظمى M، في $[a, b]$ ، ومنه

بما أنّ m و M هي قيم ثابتة، فسنحصل على

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

استخدم نظرية القيمة المتوسطة في التكامل لتقدير قيمة التكامل

18 $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx$

19 $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} 3\cos x^2\,dx$

20 $\displaystyle\int_0^{1/2} e^{-x^2}\,dx$

أوجد قيمة c التي تحقق نتيجة نظرية القيمة المتوسطة في التكامل

21 $\int_0^2 3x^2\,dx\ (=8)$

22 $\int_{-1}^{1} (x^2 - 2x)\,dx\ (=\frac{2}{3})$

استخدم خواص التكامل المحدود لكتابة تعبير في صورة تكامل منفرد

23 $\int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx$

24 $\int_0^3 f(x)\,dx - \int_2^3 f(x)\,dx$

25 $\int_{0}^{2} f(x)\,dx + \int_{2}^{1} f(x)\,dx$

26 $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx + \int_{2}^{3} f(x)\,dx$

فرضاً أنّ $\int_{1}^{3} f(x)\,dx = 3$ و $\int_{1}^{3} g(x)\,dx = -2$ اوجد

27 $\int_{1}^{3} [f(x) + g(x)]\,dx$

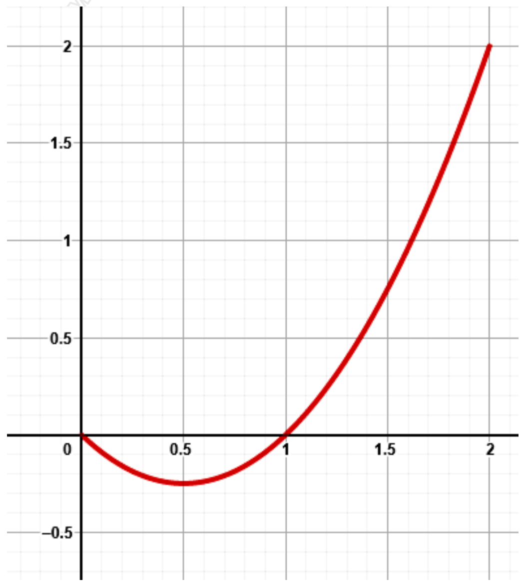
28 $\int_{1}^{3} [2f(x) - g(x)]\,dx$

29 $\int_{1}^{3} [f(x) - g(x)]\,dx$

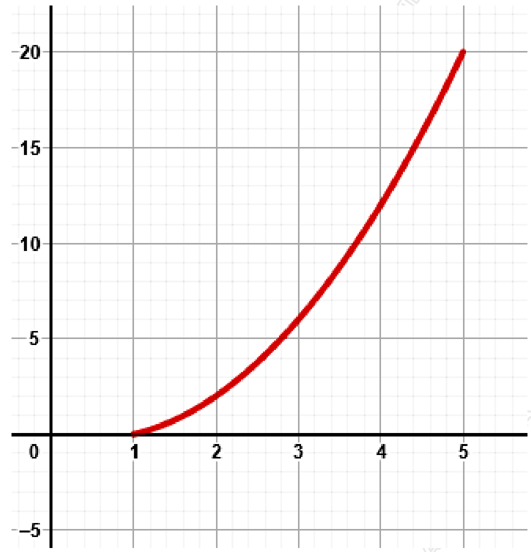
30 $\int_{1}^{3} [4g(x) - 3f(x)]\,dx$

ارسم المساحة المناظرة للتكامل

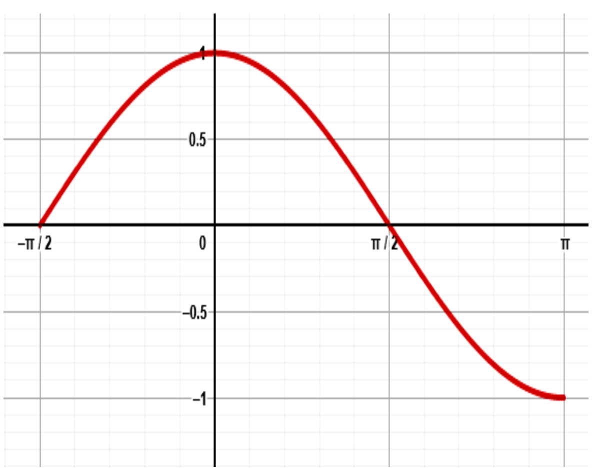
31 $\int_1^2 (x^2 - x)\,dx$



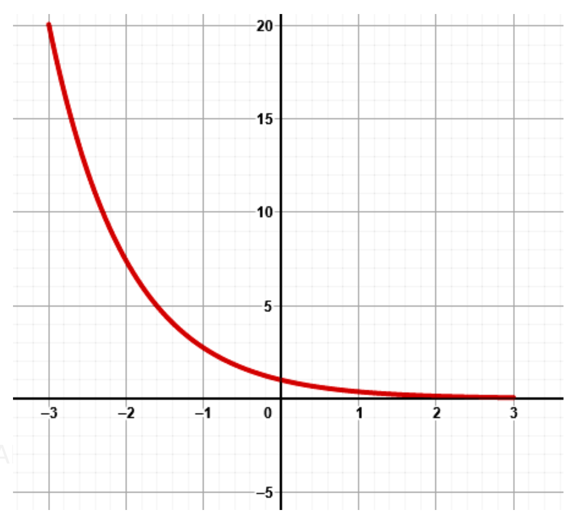
32 $\int_2^4 (x^2 - x)\,dx$



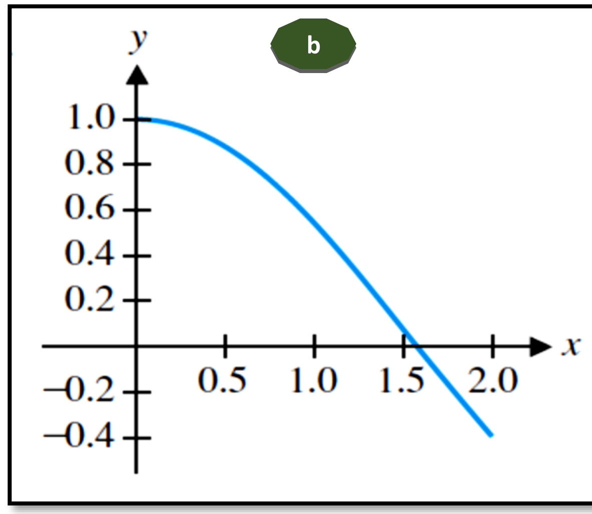
33 $\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx$

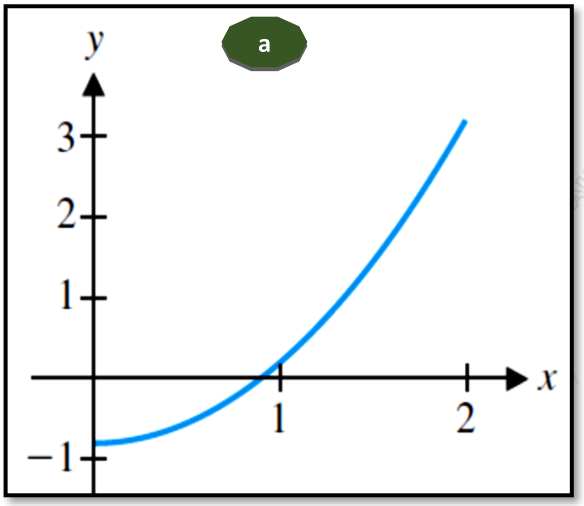


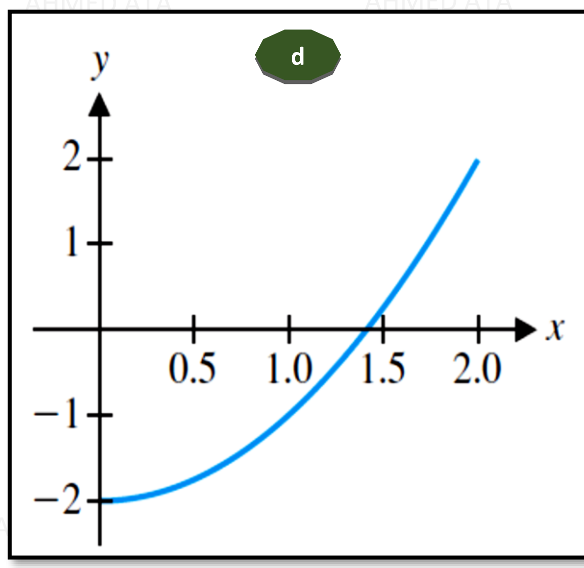
34 $\int_{-2}^{2} e^{-x}\,dx$

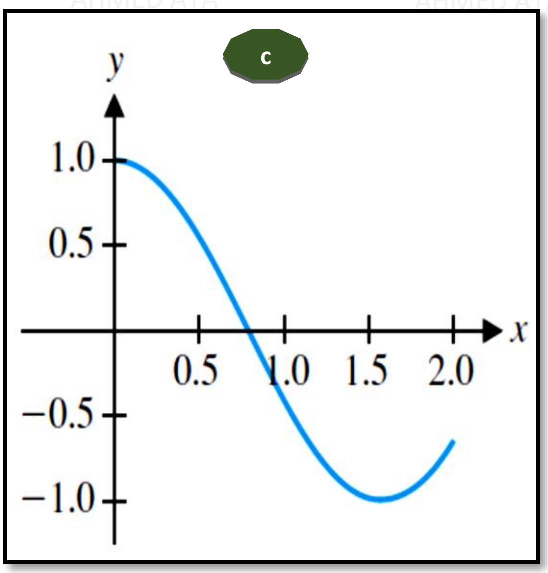


35 استخدم التمثيل البياني لتحديد ما إذا كانت $\int_0^2 f(x)\,dx$ موجبة أم سالبة



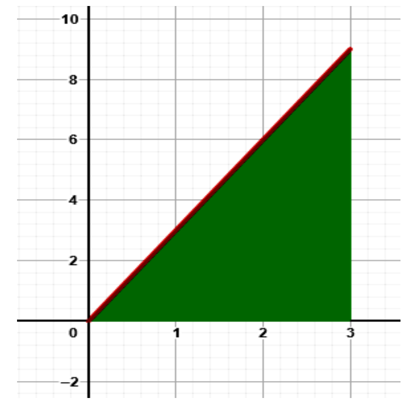




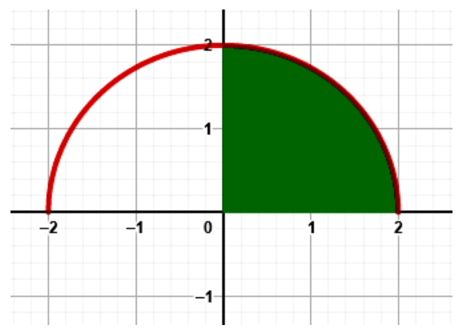


36 استخدم القوانين الهندسية لحساب التكامل

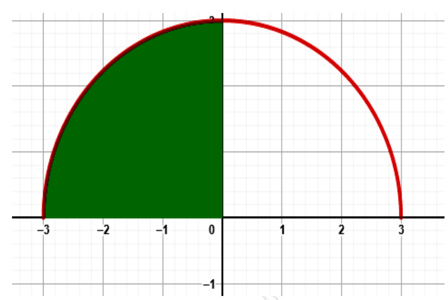
a $\int_0^2 3x\,dx$



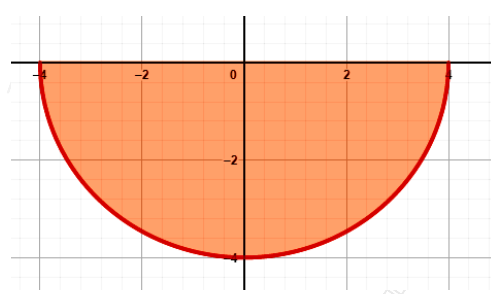
b $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$



c $\int_{-3}^{0} \sqrt{9-x^2}\,dx$



d $-\int_{-4}^{4} \sqrt{16-x^2}\,dx$



THE FEATURED PROGRAM EDUCATION

البرنامج المميز

MATH ARB

Mr. Ahmed Ata
The Featured Program

الثاني عشر متقدم

الدرس (5-5)

النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل

Mr. Ahmed Ata
The Featured Program

2025-2026

البرنامج المميز طريقك للتميز

Prepared by :

MR- AHMED ATA

@AHMEDATACHAT

https://t.me/ahmedatachat

0566010255 -0502070147

ahmatta.math@gmail.com

UAE - ABU DHABI

الدرس (5-5)

النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل

النظرية 5.1 (النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل، الجزء الأول)

إذا كانت f دالة متصلة على $[a, b]$ و $F(x)$ هي أيّ دالة أصليّة لـ $f(x)$ ، فإنّ

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \tag{5.1}$$

استخدم النظرية الأساسية لحساب التكامل

1. $\int_0^2 (2x - 3)\,dx$

2. $\int_0^3 (x^2 - 2)\,dx$

3. $\int_{-1}^1 (x^3 + 2x)\,dx$

4 $\int_1^4 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx.$

5 $\int_1^4 \left(x\sqrt{x} + \frac{3}{x}\right) dx$

6 $\int_0^1 (6e^{-3x} + 4)\, dx$

7 $\int_{\pi/2}^{\pi} (2\sin x - \cos x)\, dx$

8 $\int_0^{\pi/4} \sec t \tan t\, dt$

9 $$\int_0^{\pi/4} \sec^2 t \, dt$$

10 $$\int_0^{1/2} \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

11 $$\int_{-1}^{1} \frac{4}{1+x^2} \, dx$$

12 $$\int_1^4 \frac{t-3}{t} \, dt$$

13 $\int_0^4 t(t-2)\,dt$

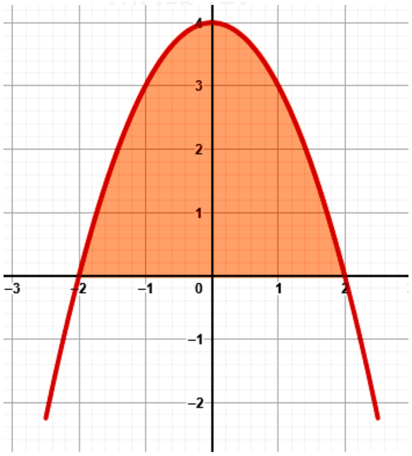
14 $\int_0^4 e^{-2x}dx$

15 $\int_1^x 12t^5 dt.$

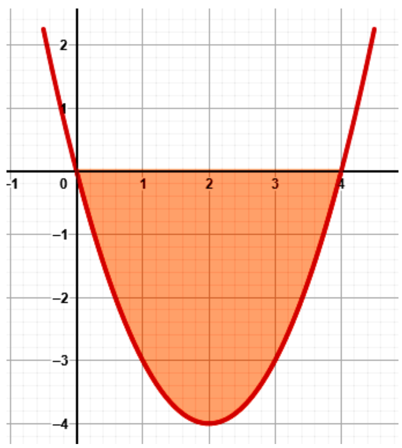
16 $\int_0^t (e^{x/2})^2\,dx$

17 $\int_0^t (\sin^2 x + \cos^2 x)\,dx$

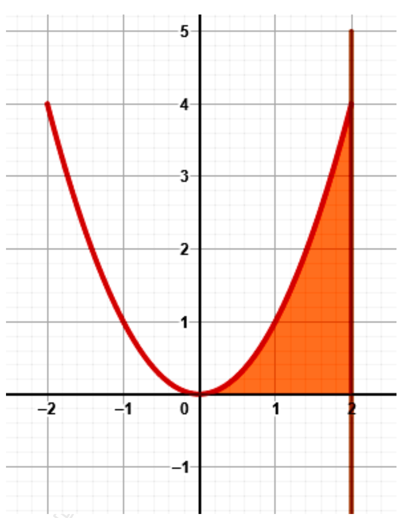
أوجد المساحة المعطاة



18 المساحة فوق المحور x وتحت $y = 4 - x^2$

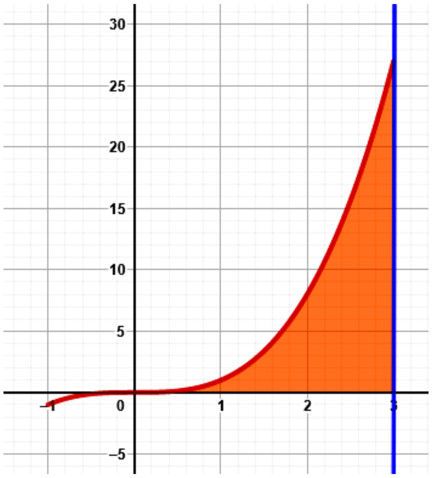


19 المساحة تحت المحور x وفوق $y = x^2 - 4x$

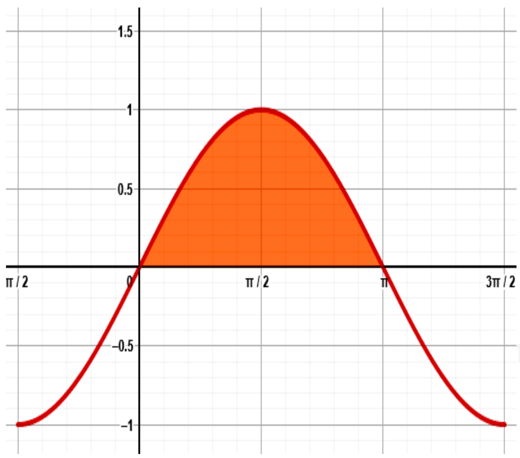


20 مساحة المنطقة المحدودة بين $x = 2$ و $y = x^2$ والمحور x

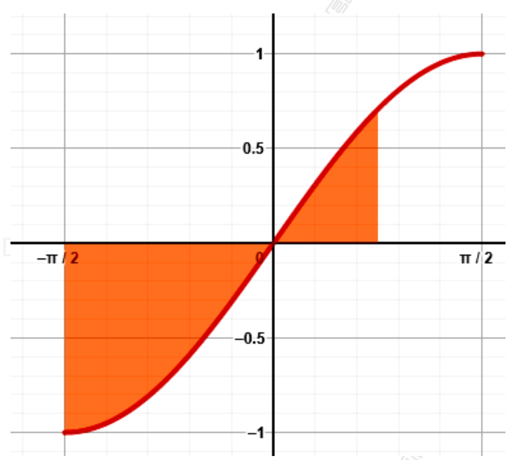
21 مساحة المنطقة المحدودة بين $x = 3$ و $y = x^3$ والمحور x



22 مساحة المنطقة المحدودة بين $y = \sin x$ والمحور x لـ $0 \le x \le \pi$



23 مساحة المنطقة المحدودة بين $y = \sin x$ والمحور x لـ $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{4}$



النظرية (النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل، الجزء الثاني)

إذا كانت الدالة f متصلة على $[a, b]$ و $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ ، فإن $F'(x) = f(x)$ ، على $[a, b]$.

أوجد الاشتقاق $f'(x)$

24 $f(x) = \int_0^x (t^2 - 3t + 2)\,dt$

25 $f(x) = \int_2^x (t^2 - 3t - 4)\,dt$

26 $f(x) = \int_0^{x^2} (e^{-t^2} + 1)\,dt$

27 $f(x) = \int_x^2 \sec t\,dt$

28 $f(x) = \int_{e^x}^{2-x} \sin t^2 dt$

29 $f(x)=\int_{2-x}^{xe^x} e^{2t}\,dt$

30 $f(x)=\int_{x^2}^{x^3} \sin(3t)\,dt$

31 $f(x)=\int_{3x}^{\sin x} (t^2+4)\,dt$

أوجد دالة الموقع $s(t)$ من السرعة المعطاة أو دالة التسارع والقيمة (القيم) الابتدائية على فرض أن الوحدات هي الأمتار والثواني

32 $v(t) = 40 - \sin t, s(0) = 2$

33 $v(t) = 10e^{-t}, s(0) = 2$

34 $a(t) = 4 - t, v(0) = 8, s(0) = 0$

35 $a(t) = 16 - t^2, v(0) = 0, s(0) = 30$

36 على فرض أنّ معدل تغير الماء في الخزان يساوي $f(t) = 10 \sin t$ L/min.

(a) لكل $0 \leq t \leq 2\pi$. حدد متى يتزايد مستوى الماء ومتى يتناقص.

(b) إذا كان الخزان يسع 100 L من الماء في الزمن $t = 0$ ، فحدد كم لترا في الخزان عند $t = \pi$.

أوجد معادلة المماس عند قيمة معطاة لـ x

37 $F(x) = \int_{4}^{x^2} \ln(t^3 + 4)\, dt \qquad at\ x = 2$

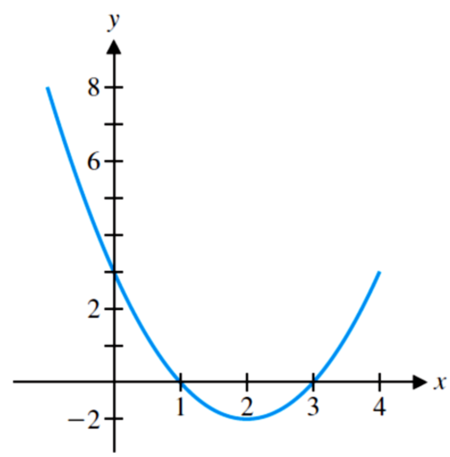
38 $$F(x) = \int_0^x \sin\sqrt{t^2 + \pi^2}\,dt \qquad at\ x = 0$$

39 $$F(x) = \int_1^{x^2} \sqrt{t^2 + 1}\,dt \qquad at\ x = 1$$

40 $$F(x) = \int_{-1}^{x} \ln(t^2 + 2t + 2)\,dt \qquad at\ x = -1$$

41 $F(x) = \int_{0}^{x} e^{-t^2+1}dt \qquad at\ x = 0$

42 استخدم التمثيل البياني لتنظيم $\int_0^1 f(x)\,dx$ و $\int_0^2 f(x)\,dx$ و $\int_0^3 f(x)\,dx$ بالترتيب من الأصغر إلى الأكبر. في ما يخص $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ ، حدد الفترات التي تتزايد فيها g وحدد النقاط الحرجة لأجل g .



THE FEATURED PROGRAM EDUCATION

البرنامج المميز

الثاني عشر متقدم

MATH ARB

الدرس (5-6)

التكامل بالتعويض

Mr. Ahmed Ata
The Featured Program

2025-2026

البرنامج المميز طريقك للتميز

Prepared by :

MR- AHMED ATA

@AHMEDATACHAT

https://t.me/ahmedatachat

0566010255 -0502070147

ahmatta.math@gmail.com

UAE - ABU DHABI

الدرس (5-6)

التكامل بالتعويض

التكامل بالتعويض

يتكوّن التكامل بالتعويض من الخطوات العامة التالية.

- **اختر متغيّرًا جديدًا u:** الاختيار الشائع هو التعبير العميق أو الحد "الداخلي" لتركيب الدوال. (في المثال 6.2. لاحظ أنّ x^3+5 هو الحد الداخلي لـ $(x^3+5)^{100}$).
- **احسب** $du = \frac{du}{dx}dx$.
- **استبدل جميع الحدود** في المكامل الأصلي مع تعابير تتضمن u و du.
- **جـد قيمة** تكامل (u) الناتج. إذا كنت لا تزال غير قادر على إيجاد قيمة التكامل، فربما تحتاج إلى تجربة اختيار مختلفة لـ u.
- **استبدل كل تكرار لـ u** في الدالة الأصلية بالتعبير المناظر للمتغير x.

استخدم التعويض المعطى لإيجاد قيمة التكامل غير المحدد

1. $\int x^2\sqrt{x^3+2}\,dx,\ u = x^3+2$

2. $\int x^3(x^4+1)^{-2/3}dx,\ u = x^4+1$

3 $\int \frac{(\sqrt{x}+2)^3}{\sqrt{x}}\,dx,\ u=\sqrt{x}+2$

4 $\int \sin x \cos x\,dx,\ u=\sin x$

أوجد قيمة التكامل غير المحدود

5 $\int x^3\sqrt{x^4+3}\,dx$

6 $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\,dx$

7 $\int \sin^3 x \cos x \, dx$

8 $\int t^2 \cos t^3 \, dt$

9 $\int xe^{x^2+1}dx$

10 $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

11 $\int \frac{\cos(1/x)}{x^2}dx$

12 $\int \sec^2 x\sqrt{\tan x}\, dx$

13 $\int \frac{v}{v^2+4}\, dv$

14 $\int \frac{(\sin^{-1} x)^3}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

15 $\int x^2 \sec^2 x^3 \, dx$

16 $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} \, dx$

17 $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}} \, dx$

18 $\int \frac{x^2}{1+x^6}\,dx$

19 $\int \frac{x^5}{1+x^6}\,dx$

20 $\int \frac{1+x}{1+x^2}\,dx$

21 $\int \frac{1+x}{1-x^2}\,dx$

22 $\int \frac{3\sqrt{x}}{1+x^3}\,dx$

23 $\int \frac{2t+3}{t+7}\,dt$

24 $\int \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,dx$

25 $\int \frac{t^2}{\sqrt[3]{t+3}}\,dt$

26 $\int_0^2 x\sqrt{x^2+1}\,dx$

27 $\displaystyle\int_1^3 x\sin(\pi x^2)\,dx$

28 $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{t}{(t^2+1)^2}\,dt$

29 $\displaystyle\int_0^2 \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$

30 $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot x \, dx$

31 $\displaystyle\int_{1}^{e} \frac{\ln x}{x} \, dx$

32 $\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{x-1}{\sqrt{x}} \, dx$

33 $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

34 $\int_0^1 (e^x - 2)^2 dx$

35 $\int_0^{10} (1 - e^{-t/4})\,dt$